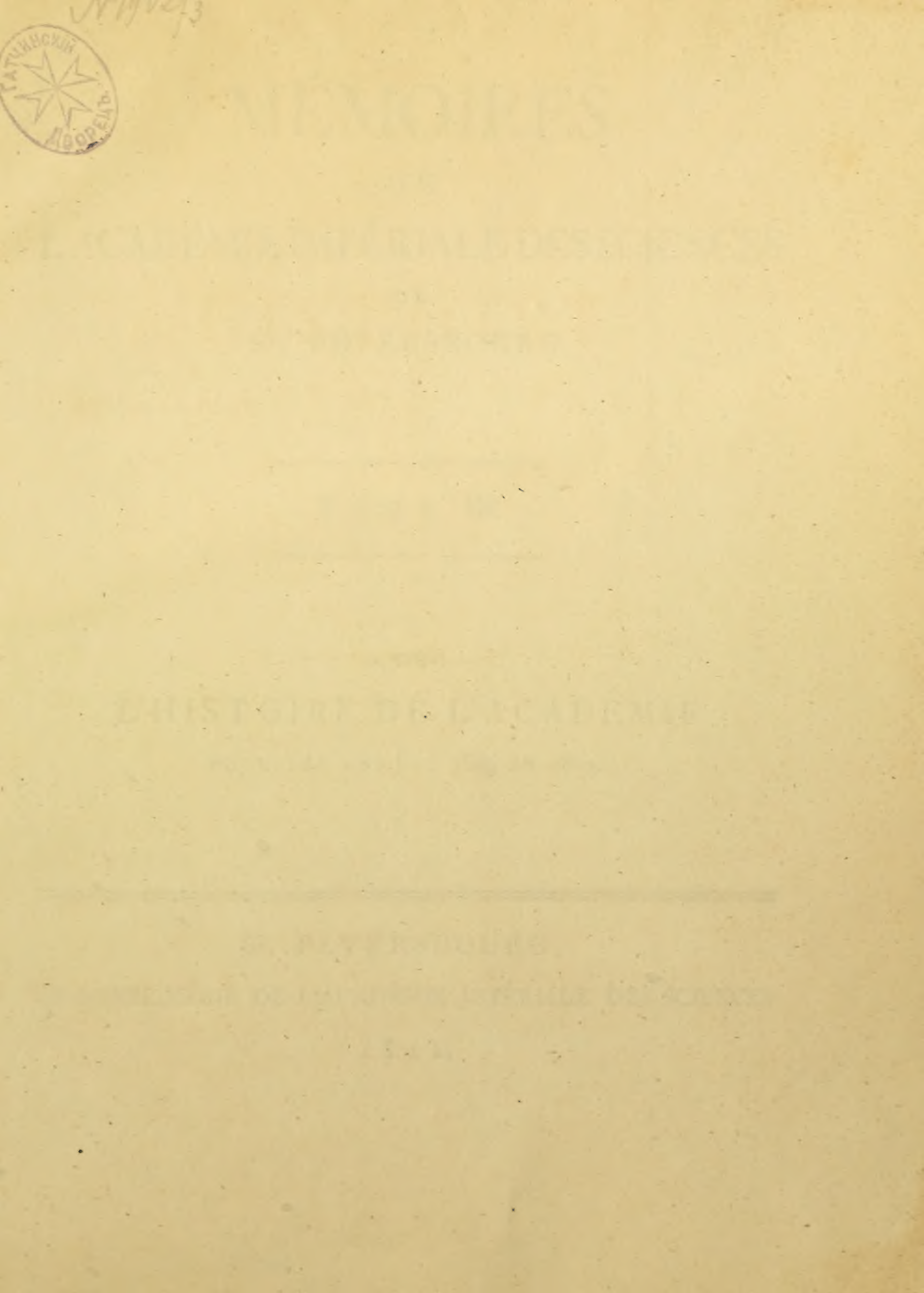








MÉMOIRES

DE

L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

DE

ST. PÉTERSBOURG.

TOME III.

AVEC

L'HISTOIRE DE L'ACADÉMIE

POUR LES ANNÉES 1809 ET 1810.

ST. PÉTERSBOURG,

DE L'IMPRIMÉRIE DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES

1811.

Publié par ordre de l'Académie

N. Fuss

Secrétaire perpétuel.

HISTOIRE

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE

DES SCIENCES.

ANNÉES 1809 *ET* 1810.

HISTOIRE
DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

ANNÉES 1809 et 1810.

I.

Evènemens mémorables.

1. Le 14 Janvier 1809, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR, accompagné de *Sa Majesté le Roi de Prusse* et de LL. AA. RR. les Princes *Guillaume* et *Auguste* de Prusse, ayant daigné honorer de SON Auguste présence le Musée de l'Académie Impériale des Sciences, la Conférence arrèta de faire consigner dans ses régistres cet évènement à jamais mémorable. SA MAJESTÉ IMPÉRIALE daigna amener ces augustes Hôtes à onze heures du matin, et fut reçu au bas de l'escalier du Musée par Leurs Excellences Mgr. le Ministre de l'Instruction et Mr. le Président de l'Académie et par le corps des Académiciens et Adjoints, qui eurent le bonheur d'être présentés, dans le grand sallon, par SA MAJESTÉ

L'EMPÉREUR, à Sa Majesté le Roi de Prusse. Après la présentation Mgr. le Ministre, Mr. le Président et les membres de la Conférence eurent l'honneur d'accompagner LEURS MAJESTÉS d'abord dans les divers Cabinets de Minéralogie: (1° celui des minéraux exotiques; 2° celui des minéraux indigènes, l'un et l'autre nouvellement rangé et considérablement augmenté depuis quelques années; 3° la collection de minéraux rangés par ordre géographique et 4° celle d'instruction). De là LEURS MAJESTÉS se rendirent aux Cabinets d'Anatomie, de Zoologie, d'Entomologie et de coquilles, pareillement enrichis d'une infinité de nouvelles acquisitions; puis au Cabinet de PIERRE LE GRAND; au Cabinet des monnoyes, des médailles et choses précieuses; à l'Observatoire, muni d'un grand nombre d'instrumens nouveaux, enfin à la grotte renfermant la collection des corails et la masse de fer natif découverte par *Pallas*. Après que tout ce que ces diverses collections renferment de plus rare et de plus curieux eut été vu et examiné avec la plus grande attention par les augustes Hôtes, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR daigna très-gracieusement témoigner à l'Académie SA haute bienveuillance et SE retira, avec *Sa Majesté le Roi de Prusse* et avec les Princes, à 2 heures de l'après midi.

2. Le 18 Janvier, SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR, accompagné de *Sa Majesté le Roi de Prusse*, daigna très-gracieusement voir, dans la maison académique à la 7me ligne, le squelette d'un mâmouth trouvé par Mr. *Adams*, Adjoint de l'Académie, près de l'embouchure de la Lena, pendant un voyage qu'il fit en 1807 vers les bords de la mer glaciale. LEURS MAJESTÉS examinèrent avec la plus grande attention le squelette, la peau et les crins de cet animal gigantesque.

3. Le 4 Juin 1809, le Musée de l'Académie eut le bonheur d'être honoré de la visite de SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE ELISABETH ALEXIEWNA, accompagnée de S. A. R. *Madame la Princesse Amélie de Bade*. SA MAJESTÉ IMPÉRIALE fut reçue au bas de l'escalier, au sortir du carosse, par S. E. Mr. le Président, par le Secrétaire perpétuel, par Mrs. les Académiciens-démonstrateurs du Musée et par plusieurs autres Académiciens et Adjoints. SA MAJESTÉ IMPÉRIALE daigna visiter successivement d'abord les quatre Cabinets de Minéralogie, ensuite celui de coquilles et celui de Zoologie et dans le dernier ELLE vit, entre autres, le squelette de mamouth, monté par Mr. l'Adjoint *Adams*. Elle s'arrêta avec intérêt dans le Cabinet de PIERRE LE GRAND, dans le Médailler, à l'Observa-

toire et au grand globe de Gottorp. Après avoir consacré près de trois heures à la contemplation attentive de tout ce que ces différentes collections renferment de plus curieux, SA MAJESTÉ IMPÉRIALE se retira à 3½ heures, en témoignant, dans les termes le plus gracieux, SA satisfaction à S. E. Mr. le Président et aux Académiciens - démonstrateurs.

4. La même curiosité zoologique dont il a été fait mention ci-dessus (Article 2 et 3.), savoir le squelette du mamouth, procura à l'Académie, quelque tems après la visite de L'EMPÉREUR, celle de SA MAJESTÉ L'IMPÉRATRICE MÈRE, et quelques jours plus tard encore celle de LEURS ALTESSES IMPÉRIALES NOSSEIGNEURS LES GRANDS-DUCS NICOLAS ET MICHEL. Ces personnes augustes honorèrent la maison académique de la 7me ligne de LEUR haute présence, et y virent le squelette mentionné, une partie de la peau et des crins de ce quadrupède de race éteinte.

5. Le 24 Janvier 1810, S. E. Mr. le Président fit savoir à l'Académie, d'avoir obtenu, à la suite de sa très humble demande, un congé illimité pour voyager dans les pays étrangers et lui enjoignit en même tems de s'adresser à l'avenir, pour les affaires académiques, directement

à Mgr. le Ministre de l'Instruction, jusqu'à des ordres ultérieurs de qui il appartiendra.

6. Le 25 Avril 1810, le Comité d'Administration envoya à la Conférence la copie d'un ordre, par lequel S. E. Mgr. le Comte de *Razoumovski* fit savoir à l'Académie, d'avoir commencé ses fonctions de Ministre de l'Instruction publique. Mrs. les Académiciens et Adjoints, à la suite d'une invitation de S. E. Mr. le Président, se rendirent à l'hôtel de S. E. Mgr. le Ministre, pour le féliciter de Sa nomination et recommander l'Académie des Sciences à Sa protection particulière.

7. Le 4 Juin, S. E. Mgr. le Ministre de l'Instruction, Comte de *Razoumovski*, vint entre 10 et 11 heures du matin à l'Académie des Sciences, pour en visiter tous les divers Départemens, accompagné des Académiciens préposés à ces Départemens.

8. Le 12 Sept. S. E. Mgr. le Ministre de l'Instruction, Comte de *Razoumovski*, fit savoir à l'Académie la volonté de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR: que le globe de Gottorp soit transféré dans un autre local qui sera indiqué pour cet effet, et que SA MAJESTÉ a daigné très-gracieusement faire assigner à l'Académie une somme de 62,968 roubles que coûtera le nouveau bâ-

timent destiné à recevoir ce globe, selon le devis de l'Architecte, Mr. le Conseiller d'Etat *Zakharoff.*

II.

CHANGEMENS ARRIVÉS DANS L'ACADÉMIE.

1. Membres décédés.

a) *Académiciens ordinaires:*

Mr. *Jean Fréderic Rudolph*, Docteur en Médecine, Conseiller de Collèges, Académicien ordinaire pour la Botanique, Professeur de l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4me degré. Le Défunt fut élu Académicien le 15 Fevrier 1804, et mourut d'une inflammation des intestins le 19 Août 1809, agé de 54 ans et 11 mois.

b) *Membres honoraires de l'Intérieur:*

S. E. Mr. le Prince *Beloselski - Beloserski*, Grand-Echanson de la Cour de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR, Chambellan actuel, Chevalier de l'ordre de St. Jean de Jerusalem, de l'aigle noir et rouge. Reçu au nombre des membres honoraires de l'Intérieur le 27 Sept. 1809; mort le 26 Dec. de la même année.

S. E. Mr. *Nikon Karpinski*, Docteur en Médecine, membre du Conseil médicinal, Conseiller d'Etat actuel et

Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4me degré. Reçu le 15 Mai 1794; décédé à St. Pétersbourg le 12 Sept. 1810, agé de 65 ans.

c) *Membres honoraires externes:*

S. E. Mr. le Comte *Maurice* de *Brühl*, Ministre de la Cour de Saxe à celle de Londres etc. Reçu le 4 Avril 1793; décédé à Londres le 22 Janvier 1809, agé de 72 ans.

Mr. *Auguste Louis de Schlözer*, Conseiller intime de Justice, Docteur en Droit, Professeur de l'Université de Göttingue, Noble de l'Empire de Russie, et Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4me degré, né à Jagstadt, dans le Comte de Hohenlohe, le 5 Juillet 1735. Il commença sa carrière littéraire en Russie, sous le célèbre Historiographe *Gerard Frédéric Müller*, fut nommé Professeur d'histoire de l'Académie en 1765, après avoir été Adjoint pendant un court espace de tems. Il obtint sa dimission en 1769, fut nommé Professeur à Göttingue en 1770, et décéda en cette ville le 9 Septembre de l'année 1809, dans la 75me année de son âge.

Mr. *Antoine François de Fourcroy*, Comte de l'Empire, Conseiller d'Etat, Commendant de la Légion d'honneur, Membre de l'Institut national, Directeur général de l'Instruction publique etc. Reçu au nombre des membres ex-

ternes le 13 Oct. 1802; mort à Paris le 16 Dec. 1809, agé de 54 ans.

Mr. *Daniel* de *Melanderhjelm*, Conseiller de Chancellerie de S. M le Roi de Suède, Membre et ancien Secrétaire perpétuel de l'Académie Royale des Sciences de Stockholm, Chevalier de l'ordre de l'étoile polaire. Reçu membre honoraire externe le 23 Dec. 1776; décédé à Stockholm en Février 1810, agé de 84 ans.

d) *Correspondans de l'Intérieur:*

Mr. *Jean Tschernitzyn*, Conseiller des Mines de la 5me Classe, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 4me dégré; reçu Correspondant le 22 Juin 1800; mort à St. Petersbourg en Avril 1809.

e) *Correspondans externes:*

S. E. Mr. le Baron de *Wolzogen*, Conseiller privé actuel, Grand-Marechal de la Cour de Saxe-Weimar, Chevalier des ordres de St. Alexandre-Nevski et de Ste. Anne. Reçu au nombre des Correspondans externes le 22 Août 1804; mort à Wisbade le 17 Déc. 1809.

Mr. *Erneste Christophe Schultz*, Membre de la Société de Physique de Göttingue. Reçu au nombre des Correspondans externes le 28 Juin 1798; décédé à Hambourg le 31 Mai 1810.

2. Membre congédié.

Mr. *Alexis Wolkof*, Adjoint pour la Chymie, demanda sa dimission et l'obtint le 18 Oct. 1809.

3. Nouvelles réceptions.

a) *Au nombre des membres honoraires de l'Intérieur.*

Son Altesse Imperiale, Mgr. le Prince *George* de Holstein-Oldenbourg. Reçu le 29 Août 1810.

Son Altesse Royale Mgr. le Duc *Alexandre* de Würtemberg. Reçu le 12 Sept. 1810.

S. E. Mr. le Comte *Grégoire Orloff*, Conseiller privé, Chambellan actuel, Chef du Département des forêts de l'Empire, Chevalier de l'ordre de St. Vladimir du 2d degré et de Ste. Anne de la 1re Classe. Reçu membre honoraire le 25 Janvier 1809.

S. E. Mr. *Alexis Olenin*, Conseiller privé, Secrétaire d'Etat et Chevalier de l'ordre de Ste. Anne de la 1re Classe et Commandeur de l'ordre de St. Jean de Jérusalem. Reçu Membre honoraire le 25 Janvier 1809.

S. E. Mr. *Gabriel Sarytschef*, Vice-Amiral, Membre du Collège de l'Amirauté et Chevalier de l'ordre de St. George du 4me dégré, de Ste. Anne de la 1re classe et de St. Vladimir du 4me dégré. Reçu membre honoraire le 5 Avril 1809.

S. E. Mr. le Prince *Béloselski - Béloserski*, Grand-Echanson, Chambellan actuel, Commandeur des ordres de St. Jean de Jérusalem, de l'aigle noir et rouge. Reçu membre honoraire le 27 Sept. 1809.

S. E. Mr. le Comte *Alexandre Soltykoff*, Conseiller privé, Sénateur, Collègue du Ministre des affaires étrangères, Chambellan actuel et Chevalier des ordres de St. Alexandre-Nevski, de Ste. Anne, de l'aigle noir et rouge, et Commandeur de l'ordre de St. Jean de Jérusalem. Reçu au nombre des Membres honoraires le 1 Nov. 1809.

S. E. Mr. le Comte *Serge* de *Roumäntsoff*, Conseiller privé actuel, Membre du Conseil Suprême de l'Empire, Chambellan actuel, Chevalier de l'ordre de St. Alexandre-Nevski et Commandeur de l'ordre de St. Jean de Jérusalem. Reçu le 14 Mars 1810.

b) *Au nombre des membres honoraires externes.*

Mr. *Jean Baptiste Joseph Delambre*, Membre de l'Institut national des Sciences et des Arts et de la Légion d'honneur, Secrétaire perpétuel pour la Section des Sciences mathématiques de l'Institut. Reçu le 7 Mars 1810.

c) *Au nombre des Académiciens ordinaires.*

Mr l'Académicien extraordinaire *Alexandre Sevastianoff*, pour la Zoologie. Reçu le 19 Décembre 1810.

d) *Au nombre des Académiciens extraordinaires.*

Mr. l'Adjoint *Tilésius,* pour l'Histoire naturelle; le 12 Avril 1809.

Mr. l'Adjoint *Basile Petroff,* pour la Physique expérimentale; le 29 Nov. 1809.

Mr. l'Adjoint *Charles Théodore Herrmann,* pour l'Économie politique et la Statistique; le 17 Janv. 1810.

Mr. l'Adjoint *Auguste Chrétien Lehrberg,* pour l'Histoire; le 7 Février 1810.

Mr. l'Adjoint *Guillaume Nassé,* pour la Technologie; le 10 Octobre 1810.

e) *Au nombre des Adjoints.*

Mr. *Constantin Kirchhoff,* Assesseur de Collèges; proclamé Adjoint pour la Chymie le 8 Nov. 1809.

f) *Au nombre des Correspondans de l'Intérieur.*

Mr. *Jean Philippe Gustave Ewers,* Docteur en Philosophie. Reçu le 25 Janv. 1809.

Mr. *Tertius Bornovolokoff,* Conseiller de Collèges. Reçu le 22 Février 1809.

Mr. *Jean Emanuel Ferdinand Giese,* Professeur de Chymie à l'Université IMPÉRIALE de Kharkoff. Reçu le 5 Juillet 1809.

Mr. *Athanase Stoïkovitsch*, Conseiller de Collèges et Professeur de Physique à l'Université IMPÉRIALE de Kharkoff. Reçu le 20 Sept. 1809.

Mr. *Fréd. Henry Isenflamm*, Professeur d'Anatomie à l'Université IMPÉRIALE de Dorpat. Reçu le 27 Sept. 1809.

Mr. *Fréderic Adelung*, Conseiller de Collèges, Instituteur de LL. AA. II. Ngrs. les Grands-Ducs. Reçu le 1 Nov. 1809.

Mr. *Charles Bernard Trinius*, Docteur en Médecine. Reçu le 30 Mai 1810.

Mr. *Grégoire Spasky*, Conseiller titulaire, au Service des Mines. Reçu le 21 Juillet 1810.

Mr. *Jean Müller*, Conseiller de Cour, Directeur des Ecoles du Gouvernement d'Irkoutzk. Reçu le 10 Octobre 1810.

Mr. *Jean Fréd. Edouard Wuttig*, Professeur à l'Université IMPÉRIALE de Kazan. Reçu le 19 Déc. 1810.

g) *Au nombre des Correspondans externes:*

Mr. *J. B. Francoeur*, Professeur et Examinateur de l'Ecole polytechnique, Correspondant de l'Institut des Sciences et des Arts à Paris, et Membre associé du Dé-

partement de la Marine de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR de toutes les Russies. Reçu le 25 Janvier 1809.

Mr. *François le Vaillant*, Correspondant de l'Institut des Sciences à Paris. Reçu le 12 Avril 1809.

Mr. *Roch-Ambroise Sicard*, Instituteur des sourds et muets, Correspondant de l'Institut des Sciences à Paris. Reçu le 12 Avril 1809.

Mr. *Louis Guillaume Gilbert*, Professeur à Halle. Reçu le 6 Déc. 1809.

Mr. Rodrigo *Navarro de Andrada*, Ministre de Portugal près SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR de toutes les Russies. Reçu le 19 Décembre 1810.

4. Décorations.

Mr. l'Adjoint *Petroff* fut décoré de l'ordre de St. Vladimir du 4me dégré, le 3 Juillet 1809.

Mrs. les Académiciens extraordinaires *Schérer* et *Smélorski* furent décorés de l'ordre de St. Vladimir du 4me dégré, le 21 Sept. 1809.

Mr. l'Académicien *Schubert* fut décoré de l'ordre de St. Vladimir du 4me dégré, le 20 Juillet 1810.

5. Election de membres du Comité d'Administration.

Le 16 Août 1809. Mr. l'Académicien *Zagorski* fut

élu membre du Comité pour deux ans, à la place de S. E. Mr. l'Académicien *Fúfs*.

Le 14 Février 1810. Mr. l'Académicien *Schubert* fut nommé membre de ce Comité à la place de Mr. l'Académicien *Zagorski*, qui demanda d'être dispensé de cette fonction.

Le 22 Août 1810. S. E. Mr. l'Académicien *Fufs*, fut élu, pour la seconde fois, membre du Comité pour deux ans, à la place de Mr. l'Académicien *Severguine*.

6. Autres nominations.

Le 28 Sept. 1809. Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer*, fut nommé, par une Oukaze de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR, membre du Conseil IMPÉRIAL de Médecine.

Le 7 Oct. 1809. Mr. l'Académicien *Zagorski* et Mr. l'Adjoint *Petroff* furent nommés Académiciens ordinaires à l'Académie IMPÉRIALE de Médecine et de Chirurgie.

Le 4 Avril 1810. Mr. l'Académicien *Viscovatoff* fut nommé Professeur des Mathématiques pures et appliquées de l'Institut des voies de communication, nouvellement établi.

7. Distinctions littéraires.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Sevastianoff* fut nommé membre externe de la Société Linnéenne à Londres.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Tilésius* fut reçu membre de la Société phytographique, nouvellement fondée à Gorinka.

Mrs. les Académiciens *Fuſs* et *Schubert* furent reçus au nombre des membres externes de la Société Royale des Sciences d'Upsala.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Petroff*, fut reçu au nombre des membres honoraires externes de la Société physico-médicale d'Erlang.

Mrs. les Académiciens extraordinaires *Klaproth* et *Nassé* furent reçus membres de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes à Moscou.

8. *Nouveaux Employés au Service de l'Académie.*

Mr. *Edouard Collins,* fut nommé Elève de l'Académie pour les Mathématiques; le 11 Janvier 1809.

Mr. *Paul Pétroff,* fut reçu Translateur de la Conférence à la place de Mr. *Piletski,* le 14 Juin 1809.

Mr. *Théophile Preiſs,* Elève de l'Institut forrêstier établi à Sophie, fut reçu Ecrivain de la Conférence, le 8 Mars 1809.

III.

PRÉSENS FAITS À L'ACADÉMIE.

1. *Pour la Bibliothèque:*

Par Ordre de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR:

1°) Dictionaire Tatare - Mantchou - François, composé d'après un Dictionaire Mantchou - Chinois; par Mr. Amyot, rédigé et publié avec des additions et l'Alphabet de cette langue par L. Langlès. Paris 1789. Tome 1. 2. 4to.

2°) Alphabet Mantchou rédigé d'après le Syllabaire et Dictionnaire universel de cette langue; par L. Langlès, 3me édition. Paris 1807. 8vo.

De la part du Département IMPÉRIAL de la Marine.

Principes d'une nouvelle Théorie de la résistance des fluides; par Mr. Zacarie Nordmark. Mémoire qui a remporté un prix du Département IMPÉRIAL de la Marine de Russie. St. Petersbourg 1808. 4to.

De la part de l'Académie Royale de Lisbonne:

1°) Dictionario da lingoa Portugueza, publicado pe la Academia Real das Sciencias de Lisboa. Tom I. Lisboa 1793. Folio.

2°) Flora Cochinchinensis Joannis de Loureiro. Tom 1 et 2. Ulyssipone 1790. 4to.

3°) Colleccao de libros ineditos de Historia Portugueza. Tom. 1. 2. 3. Lisboa 1790. 4to.

4°) Memorias da Academia Real das Sciencias de Lisboa. Tom 1 et 2. Lisboa. 4to.

5°) Tratado da Educaçao physica dos Meninos; para uso da naçao Portugueza. Lisboa 1790. 4to.

6°) Memorias e Observaçoes sobre e modo de aperfeiçoar a Manufactura do Azeite de Oliveira em Portugal, remettidas a Academia Real de Lisboa, pelo Socio Dr. Antonio Dalla Bella. Lisboa 1784. 4to.

7°) Hyppolito de Euripides, vertido do Grego em Portuguez, pelo Director de huma das Classes da Academia Real das Sciencias. Lisboa 1803. 4to.

8°) Documentos Arabicos para a historia Portugueza; por Joao de Sousa. Lisboa 1790. 4to.

9°) Observaçoes historicas e criticas para servirem de Memorias ao Systema da Diplomatica Portugueza, publicados por Jo. Pedro Ribeiro. Parte 1. Lisboa 1798. 4to.

10°) Ensaio economico sobre o Commercio de Portugal e suas Colonias, publicado de ordem da Academia Real, por Ozeredo Coutinho. Lisboa 1794. 4to.

11°) Advertencias sobre os abusos e legitimo uso das Aguas mineraes das Caldas da Reinha, publicado de ordem da Academia Real; por Francisco Tavares. Lisboa 1791. 4to.

12°) Memorias de Agricultura, permiadas pe la Academia Real das Sciencias de Lisboa. Tom 1 et 2. Lisboa 1788 et 1791. 8vo.

13°) Memorias de Litteratura Portugueza, publicadas pe la Academia Real das Sciencias de Lisboa. Tom 1. 2. 3. 4. 5. 6. Lisboa 1792. 8vo.

14°) Memorias economicas. Tom 1. 2. 3. Lisboa 1789. 8vo.

15°) Memorias para a historia da Capitania de S. Vincente, hoje chamada de S. Paulo, do estado do Brazil; por G. da Madre de Deos. Lisboa 1797. 8vo.

16°) Vestigios da lingua arabica em Portugal, o Lexicon etymologico das Palavras e nomes Portuguezes, que tem origem arabica; por Fr. Joao de Sousa. Lisboa 1789. 8vo.

17°) Paschalis Josephi Mellii Freirii Institutionum Juris civilis Lusitani Lib. 1. 2. 3. 4. Editio tertia. 8vo.

18°) Paschalis Jos. Mellii Freirii Historiae Juris civilis Lusitani, liber singularis. Editio quarta. Olyssipone 1806. 8vo.

19°) Paschalis Jos Mellii Freirii Institutionum Juris criminalis Lusitani, liber singularis. Olyssipone 1794. 8vo.

20°) Vida de infante dom Duarte, pelo Mestre Andre de Rezende. Lisboa 1789. 4to.

21°) Obras poeticas de Francisco Dias Gomes. Lisboa 1799. 8vo.

22°) Synopsis chronologica ordenada por José Anastasio de Figueiredo. Lisboa 1790. Tom 1 et 2. 8vo.

23°) J. H. Lambert, Supplementa tabularum logarithmicarum et trigonometicarum. Olyssipone 1798. 8vo.

24°) Indice chronologico remissivo da Legislaçao Portugueza; par J. P. Ribeiro. Lisboa 1805. Tom 1 et 2. 8vo.

25°) Fontes proximas da compilaçao Filippina, por Joa. José Ferreira Gordo. Lisboa 1792. 8vo.

26°) Analyse chimica da agoa das Caldas da Reinha, por G. Withering. Lisboa 1795. 8vo. (avec la traduction angloise.)

27°) Observaçoes sobre as principaes causas da Decadencia dos Portuguezes na Asia; por Anton do Amaral. Lisboa 1790. 8vo.

28°) Osmia, Tragedia de assumpto Portuguez em cinco actos. Lisboa 1796. 8vo.

29°) Breves instrucçoes a os Correspondentes da Academia das Sciencias de Lisboa. 1781. 8vo.

30°) Poezias de Pedro de And. Caminha. Lisboa 1791. 8vo.

31°) Principios de Tactica naval; por Manoel do Esp. Santo Limpo. Lisboa 1797. 8vo.

32°) Dominici Vandelli Viridarium Grisley-Lusitanicum Linnean. Olysipone 1798. 8vo.

33°) Taboas que contem os logarithmos. 1804. 8vo.

34°) Advertencias dos meios que os particulares podem usar para preservar se da peste. Lisboa 1801. 8vo.

35°) Obras de Francisco de Borja Garçao Stockler. Tomo 1. Lisboa 1805. 8vo.

36°) Collecçao dos principaes Autores da Historia Portugueza, publicada com notas; pelo Director da Classe da Litteratura da Academia Real. Tom 1. 2. 3. 4. Lisboa 1806. 8vo.

37°) Avisos interessantes sobre as mortes apparentes, recopilados da Collecçao da Sociedade humana de Inglaterra das obras de Mr. Pia et Gardanne. Lisboa 1790. 8vo.

38°) Tratado de Agrimensura, no qual se propoe o preciso para hum Medidor de Campos; pelo E. Cabral. Lisboa 1794. 8vo.

39°) Compilaçao de reflexoes de Sanches, Pringle Monro, van Swieten e outros, ecerca das Causas prevençoes e remedios das doenças dos Exercitos, por Ant. das Neves. Lisboa 1797. 8vo.

40°) Compendio da Theoria dos limites, ou introducçao ao methodo das fluxoes, por Fr. de Borja Garçao de Stockler. Lisboa 1794. 8vo.

De la part de la Société IMPÉRIALE libre économique.

1°) Новая и полная Система практическаго сельскаго домоводства. Томъ IV. V. VI. С. П. Б. 1808.

2°) Хозяйственное Описаніе Астраханской и Кавказской Губерніи, по гражданскому и естественному ихъ состоянію. С. П. Б. 1809. 8vo.

3°) Наставленіе о приготовленіи сухихъ и влажныхъ туковъ, и пр. С. П. Б. 1809. 8vo.

De la part de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes à Moscou.

1°) Tableaux synoptiques de Zoognosie, publiés à l'usage de ses Elèves; par le Professeur G. Fischer. Moscou 1808. 4°.

2°) Lettre à S. E. Mr. le Comte Alexandre de Stroganoff etc.

sur le Trogontherium, animal fossile et inconnu de son Cabinet, par le Professeur et Directeur Fischer. Moscou 1809. 4to.

3°) Rapport périodique des travaux de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes de Moscou, adressé à ses membres. 1r. Cahier 1809. 8vo.

4°) Mémoires de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes de Moscou. Tome II. Moscou 1809. 4to.

5°) Notices des fossiles du Gouvernement de Moscou, par le Directeur perpétuel de la Société, Gotthelf Fischer. Moscou 1809. 4to.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:

1°) Praelectiones semestres in Universitate litterarum Caesarea Dorpati Livonorum constituta, a Calendis sextilis anni 1809. Folio.

2°) Jacob Johann Graf v. Sievers; eine Vorlesung gehalten von Dr. Fr. Rambach. Dorpat 1809. 4to.

De la part du Conseil de l'école IMPÉRIALE polytechnique:

1°) Journal de l'école polytechnique, publié par le Conseil de cet établissement. Tome VII. Paris 1808. 4to.

2°) Correspondance sur l'école polytechnique; par Mr. Hachette. Tome I. Paris 1808. 8vo.

De la part de la Société Royale de Londres:

1°) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the Year 1808. Part 1 et 2. London 1808. 4to.

2°) Philosophical Transactions of the Royal Society of London, for the Year 1809. Part 1. London 1809. 4to.

De la part de la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin:

Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde; 2ten Jahrgangs 3tes und 4tes Quartal; 3ten Jahrgangs 1stes Quartal. Berlin. 4to.

De la part des Editeurs:

Fundgruben des Orients, bearbeitet durch eine Gesellschaft von Liebhabern. Wien 1809. Folio.

De la part de la Direction du Cabinet Impérial d'histoire naturelle à Vienne:

Nachrichten von dem Steinregen zu Stannern in Mähren, am 22. May 1808, und von den physisch-chemischen Eigenschaften der herabgefallenen Massen u. s. w. Halle 1808. 8vo.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Moscou:

Catalogus praelectionum in Universitate litterarum Caesarea Mosquensi a 17. Aug. 1809 ad 28. Jun. 1810 habendarum.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Vilna:

Praelectiones in Universitate doctrinarum Caesarea Vilnensi habendae.

De la part de S. E. Mr. le Général de Suchtelen:

1°) Подробная Карта Россійской Имперіи и близъ лежащихъ заграничныхъ владѣній.

2°) Генеральная Карта части Россіи, раздѣленная на Губерніи и Уѣзды, съ показаніемъ почтовыхъ дорогъ и пр. ч.

3°) Карманный почтовой Атласъ всей Россійской Имперіи, раздѣленной на Губерніи, съ показаніемъ главныхъ дорогъ.

De la part de S. E. Mr. le Vice-Amiral Sarytscheff:

1°) Путешествіе флота Капитана Сарычева, по северовосточной

части Сибири, ледовитому морю и восточному Океану. Часть 1 и 2. С. П. Б. 1802. 4to.

2°) Дневныя записки плаванія Вице-Адмирала Гаврилы Сарычева въ 1802-1805 годахъ. С. П. Б. 1808. 4to.

De la part de S. E. Mr. le Comte de Széchényi:

1°) Catalogus numorum Hungariae et Transylvaniae Instituti nationalis Széchényiani, Tom. 1 et 2. Pestini 1807. 8vo.

2°) Tabulae numismaticae pro Catalogo numorum Hungariae et Transylvaniae etc. Folio oblong.

De la part de S. A. R. Mgr. le Prince Primat Grand-Duc de Frankfort:

1°) Momentum Keplero dedicatum, Ratisbonae die XXVII. Decemb. anno MDCCCVIII. Ratisbonae 1809. Fol. maj.

2°) Recherches sur l'irréductibilité arithmétique et géométrique de nombres et de leurs puissances. 1808. 4to.

De la part du Ministre de l'Intérieur Crétet à Paris:

Voyage et découvertes aux terres australes, exécuté par ordre de Sa Majesté l'Empéreur et Roi, sur les Corvettes le Géographe et le Naturaliste et la Goëlette le Casuarina, pendant les années 1800-1804, rédigé par M. F. Peron. Tome 1. Paris 1807. 4to. (avec l'Atlas appartenant à ce volume, exécuté par Mrs. le Sueur et Petit).

De la part de Mr. le Comte La Place, Chancelier du Sénat:

1°) Supplément au Traité de Mécanique céleste, présenté au bureau des longitudes. Paris 1808. 4to.

2°) Tables astronomiques, publiées par le bureau des longitudes. Nouvelles tables de Jupiter et de Saturne, calculées d'après la théorie de Mr. La Place par Bouvard. Paris 1808. 4to.

De la part de diverses Imprimeries de l'Empire:

Nonante huit ouvrages imprimés.

De la part de Mr. Schröter, Grand-Baillif à Lilienthal:

Kronographische Fragmente zur genauern Kenntnifs des Planeten Saturn, seines Ringes und seiner Trabanten. 1r Theil. Göttingen 1808. 8vo.

De la part de Mr. le Conseiller de Collège de Kotzebuë:

Preufsens ältere Geschichte. 4 Bände. Riga 1808. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Storr à Tübingue:

G. C. C. Storr Idea methodi fossilium, sive Museum physiognosticum, methodo, cujus per partes singulas ratio redditur, digestum descriptumque. Partis 1. oreognosticae Liber 1, methodologicus. Stuttgartiae 1807. 4to.

De la part des Auteurs:

1°) Memoria sopra alcuni esperimenti idrometriche di Sua Eccel. il Sr. Cavaliere Vittorio Fossombroni.

2°) Nuove richerche dirette a rettificare la Teoria della resistenza de fluidi, e le sue applicazioni. Memoria 2da.

3°) О составленіи народныхъ таблицъ; сочин. Оберъ-Бергъ-Гауптманомъ 4. Класса и Кавалеромъ Германомъ; Екатеринбургъ. 1808. Folio.

De la part de Mr. le Professeur Grindel à Dorpat:

Erste Rechenschaft über mein China-Surrogat; von Dr. D. H. Grindel. Dorpat 1809. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur-Adjoint Gräznoff:

О восхожденіи двойнаго Конуса самаго по себѣ въ верхъ по двумъ наклоннымъ плоскостямъ, С. П. Б. 1808. 4to.

De la part de Mr. l'Académicien Storch:

Rufsland unter *Alexander* dem Ersten. Eine historische Zeitschrift, von H. Storch. XXV. Lieferung.

De la part de Mr. le Professeur Giese à Kharkoff:

Lehrbuch der Pharmazie, zum Gebrauch öffentlicher Vorlesungen und zur Selbstbelehrung. 1r Bd. 2r Th. 4te Abtheilung. Riga 1808. 8vo.

De la part de Mr. l'Academ. extraord. Klaproth:

Vocabulario de Letra China, con la explicacion Castillan, por Francisco Diaz. gr. 4to.

De la part de l'Auteur:

China-Surrogat, oder ein neues Arzneymittel, entdeckt von Dr. D. H. Grindel. Dorpat 1809. 8vo.

De la part de Mr. Pulli:

Istruzioni teorico-pratiche sulla raccolta del nitro. Napoli 1808. 8vo.

De la part de Mr. Linde, Recteur du Lycée à Varsovie:

Slownik Jezika Polskiego, przez M. Samuela Bogomila Linde. Tom 1. Czesz 2. w Warsawie 1808. 4to.

De la part de Mr. le Docteur Ebel:

Ueber den Bau der Erde in dem Alpengebirge, zwischen 12 Längen und 2–4 Breitengraden u. s. w. von J. G. Ebel, 2 Bände mit vielen Karten. Zürich 1808. 8vo.

De la part de Mr. l'Adjoint Nassé:

Ueber die Aetherbildung im Allgemeinen. Eine auf Erfahrung sich gründende Theorie. Leipzig 1809. 4to.

De la part de S. E. Mr. le Capitaine en Chef des Mines Hermann:

Описаніе Заводовъ, подъ вѣдомствомъ Екатеринбургскаго горнаго начальства состоящихъ.

De la part de Mr. Engel à Vienne:

Monumenta Ungrica, edidit Joannes Christianus Engel. Viennae 1809. 8vo.

De la part de Mr. Bode:

Erläuterung der Sternkunde und der dazu gehörigen Wissenschaften; von J. E. Bode. Berlin 1808. 3. B. 8vo.

De la part de Mr. le Docteur de Lamberti:

Das vorzüglichste Brod Surrogat, oder Nothbrod, als Beitrag zur Rettung der Menschen vom Hungertode; von A. v. Lamberti. Dorpat 1809. 4to.

De la part de l'Université de Kazan:

Un exemplaire de la 1re et 2de moitié de la 2de édition de l'Alcoran in 4to. et un exemplaire de la 4me édition de la 7me partie du Koran.

De la part de Mr. Jeckel à Vienne:

Pohlens Staatsveränderungen und letzte Verfassung. IV. Theil. Wien 1806. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Heinrich à Ratisbonne:

Bestimmung der Maafse und Gewichte des Fürstenthums Regensburg; von P. Heinrich. Regensburg 1808. 8vo.

De la part de Mr. le Conseiller d'Etat de Reimers:

1°) Санктпетербургская Адресная Книга на 1809 годъ. 1. и 2. Отдѣленіе. 8vo.

2°) Dictionnaire d'Adresses de St. Pétersbourg; pour 1809. Deux parties. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Jurine à Genève:

Nouvelle méthode de classer les Hyménoptères et les Diptères; par Mr. Jurine. Tom 1. avec figures. Genève 1807. 4to.

De la part de l'Auteur:

1°) Leonhard's Jahrbücher der Mineralogie. 2 Bände.

2°) Leonhard's topographische Mineralogie. 2 Bände.

3°) Leonhard's tabellarische Uebersicht der Mineralien.

De la part de Mr. Pansner:

Das Reise-Barometer.

De la part de Mr. le Professeur Stoïkovitsch à Kharkoff:

Начальныя Основанія умозрительной опытной Физики. Часть 1 и 2. 1809. 8vo.

De la part de l'Auteur:

О первобытной Россіи и ея жителяхъ. Сочиненіе Николая Арцыбышева. С. П. Б. 1809. 8vo.

De la part de Mr. l'Académicien Gourieff:

Разсужденіе о Маѳематикѣ и ея отрасляхъ, читанное при открытіи Санктпетербургской духовной Академіи. Февраля 17. дня 1809. года.

De la part de Mr Jakob, Professeur à Kharkoff:

1°) Grundsätze der National-Oeconomie oder National-Wirthschafts-Lehre, 2 verbesserte Auflage. Charkoff 1809. 8vo.

2°) Grundsätze der Polizey Gesetzgebung und der Polizey-Anstalten. 1. und 2. Band Kharkoff 1806. 8vo.

De la part de Mr. de Waxell:

1°) Brookshaw's Pomona Britannica, or the Nobleman and Gentleman's Fruit-Repository. Nr. XVI. XVII, Nr. XVIII. XIX, Nr. XXI et XXII.

2°) Catalogue of the Leverian Museum. Part 1.

3°) A history of mountains geographical and mineralogical, complied by J. Wilson Vol. 2. London 1809. 4to.

4°) Essai sur les Médailles plaquées des Anciens; par Leon de Waxell. Londres 1809. 8vo.

De la part de Mr. le Professeur Vater à Königsberg:

Untersuchungen über Amerika's Bevölkerung aus dem alten Kontinente; von J. S. Vater. Leipzig 1809. 8vo.

De la part de Mr. Comte de Bournon à Londres:

Traité de Minéralogie 1re partie etc. par Mr. le Comte de Bournon. Volume 1, 2, 3. Londres 1808. 4to.

De la part de Mr. le Professeur Huth à Kharkoff:

Ode auf *Alexander* den Ersten, Kaiser von Rufsland, an S. K. M. Namenstage den 30. August 1809. in der öffentlichen Versammlung der Universität zu Charkoff vorgelesen. Charkoff 1809. 4to.

De la part de Mr. Mayer:

Руководство къ познанію Римскаго права, по систематическому порядку Юстиніановыхъ уставовъ и проч: начертанное вѣдомства коллегіи иностранныхъ дѣлъ Актуаріусомъ Александромъ Майеромъ. Книга 1. Тетрадь 1. С. П. Б. 1809. 8vo.

De la part de l'Auteur:

1°) Начальныя основанія Технологіи, или краткое показаніе работъ на заводахъ и фабрикахъ производимыхъ, изданныя Иваномъ Двигубскимъ. Москва 1807. 8vo.

2°) Физика, въ пользу воспитанниковъ благороднаго университетскаго Пенсіона, изданная Ив. Двигубскимъ. Москва 1808. 8vo.

De la part de Mr. le Chevalier Thunberg à Upsal:

1°) Dissertatio botanica de Dracaena; Auctore Dalmann. Upsaliae 1808. 4to.

2°) Ad natalitia sacra Caeciliae. Principis Regni Sveogothici hereditariae, celebranda in regia Academia Upsaliensi. Upsaliae 1807. Folio.

3°) Ad orationem inauguralem Professoris Andr. Hulten invit. liae 1808. Folio.

4°) Ad orationem inauguralem Professoris Levinii Olbers invit. Upsaliae 1806. Folio.

5°) Catalogus praelectionum in Academia Regia Upsaliensi a die 1. Octobris 1808 ad idem tempus anni sequentis instituendarum. Upsaliae.

6°) Catalogus praelectionum in Academia Regia Upsaliensi a die 1. Octobris 1809.

7°) Museum naturalium Academiae Upsaliensis, appendices IX. XI. XII. XIII. XIV. XV. XVI. XVII, et XVIII. Upsaliae 1809. 4to.

8°) Betula. Auctore Elia Fant. Upsaliae 1807. 4to.

9°) Reformandae pharmacopoeae Suecicae specimen VI. et VII. Auct. Fab. Levin. Upsaliae 1806 et 1807. 4to.

10°. 11°. 12°) Orationes habitae a Rectoribus Academiae Upsaliensis Thunberg, Fant et Afzelio; annis 1804, 1805, 1806.

De la part de l'Académie IMPÉRIALE Russe:

1°) К. Криспа Саллустія Исторія о войнѣ Катилины и о войнѣ Югурөы, переведена съ Латинскаго И. Озерецковскимъ. С. П. Б. 1809, 8vo.

2°) Россійская Грамматика, сочиненная Императорскою Россійскою Академіею, 2е изданіе. С. П. Б. 1809. 8vo.

De la part de l'Académie Américaine de Boston:

Memoirs of the American Academy of Arts and Sciences. Vol. II. Part 1 et 2. Boston 1793 et 1800. 4to.

De la part de l'Académie des Sciences de Padoue:

Memorie della Academia di Scienze, Lettere ed Arti di Padova. Padova 1809. 4to.

De la part de l'Académie Royale de Munic:

1°) Akademisches Taschenbuch für die Mitglieder der Königlichen Akademie der Wissenschaften in München auf das Jahr 1809. 4vo.

2°) Erstes Bulletin der mathemat. physicalischen Classe der Königl. Akademie der Wissenschaften. 1807.

3. et 4°) Jahrberichte der Königlichen Akademie der Wissenschaften von 1808 und 1809. 2 Hefte in 4to.

5°) Aeltere Geschichte der Saline Reichenhall, von M. Flurl. Manheim 1809. 4to.

De la part de la Société IMPÉRIALE libre économique:

Новое Продолженіе трудовъ вольнаго экономическаго Общества, къ поощренію въ Россіи земледѣлія и домостроительства. Часть LXI. С. П. Б. 1809. 8vo.

De la part de la Société des amis Scrutateurs de la nature à Berlin:

Der Gesellschaft naturforschender Freunde zu Berlin Magazin für die neuesten Entdeckungen in der gesammten Naturkunde; 3ten Jahrgangs 2tes, 3tes, 4tes Quartal. Berlin 1809. 4to. 4ten Jahrgangs 1tes und 2tes Quartal. Berlin 1810. 4to.

De la part de l'Institut Royal national d'Italie:

Memorie del Istituto nazionale Italiano. Tomo I. Parte 1 et 2. Bologna 1806. 4to.

De la part du Conseil de l'école Impériale polytechnique à Paris:

Journal de l'école polytechnique, publié par le Conseil d'Instruction de cet établissement. Tom VIII. Paris 1809. 4to.

De la part de l'Imprimerie de l'Université IMPÉRIALE de Moscou:

Trente deux ouvrages, sortis de l'Imprimerie de l'Université.

De la part de l'Université IMPÉRIALE de Dorpat:

Praelectiones semestres, in Universitate Caesarea, quae Dorpati constituta est. Insunt tres epistolae Joannae Graiae, quarum duae anecdotae.

De la part de Mr. l'Académicien Schubert:

Populäre Astronomie, von Friedr. Theodor Schubert, 2ter Theil, theorische Astronomie; 3ter Theil, physische Astronomie. St. Petersburg 1810. 8vo.

De la part de S. E. Mr. le Conseiller privé Comte Jean Potocki:

Principes de Chronologie pour les tems antérieurs aux Olympiades. St. Pétersbourg 1810. 4to.

De la part de Mr. l'Académicien Klaproth à Berlin:

Beyträge zur Kenntnifs der Mineral-Körper, 5ter Band. Berlin und Leipzig 1810. 8vo.

De la part de Mr. le Conseiller de Colléges Adelung:

1°) Asiatic Researches, or Transactions of the Society instituted in Bengal, for inquiring into the History and Antiquities, the Arts, Sciences and Litterature of Asia. Volume the VIII and IX. London 1808 et 1809. 8vo.

Quelques livres en langue tatare, imprimés par le Rev. H. Brunton, Missionaire Ecossois à Karas, savoir:

1°) L'Evangile de St. Mathieu.

2°) Un Catechisme.

3°) Principes de la religion chrêtienne.

4°) Adresse aux Moslem, contenant des argumens contre le Mahomédisme et en faveur du Christianisme.

De la part de Mr. Haüy:

Tableau comparatif des résultats de la Cristallographie et de de l'Analyse chimique, relativement à la classification des Minéraux. Paris 1809. 8vo.

De la part de S. E. Mr. le Capitaine en Chef des Mines Hermann:

1°) Описанïе Заводовъ подъ вѣдомствомъ Екатеринбургскаго горнаго начальства состоящихъ. Екатеринбургъ 1808. Folio.

2°) Историческое начертанïе горнаго производства въ Россïйской Имперïи; часть 1. въ Екатеринбургѣ 1810. Folio.

3°) Oeuvres philosophiques de Mengtsé, avec un Commentaire perpétuel, trois Cahiers en langue Chinoise.

De la part de Mr. le Capitaine de la Flotte du 1r rang de Krusenstern:

Путешествïе вокругъ свѣта въ 1803, 4, 5 и 1806 годахъ, по повелѣнïю ЕГО ИМПЕРАТОРСКАГО ВЕЛИЧЕСТВА АЛЕКСАНДРА ПЕРВАГО, на кораблахъ Надеждѣ и Невѣ, подъ начальствомъ флота Капитана 1. ранга Крузенштерна. Часть 1. С. П. Б. 1809. 4to.

De la part de Mr. Antonio Montucci à Berlin:

1°) Remarques philologiques sur les voyages en Chine de Mr. de Guignes, par Sinologus Berolinensis. Berlin 1809. 8°.

2°) Réponse à une lettre imprimée, signée Jul. v. Klaproth. 4°.

3°) Audi alteram partem, ou réponse de Mr. Montucci à la lettre de Mr. de Guignes, insérée dans les Annales des voyages, publiées par Mr. Malte-Brun. 8vo.

De la part de Mr. l'Académ. extraord. Klaproth:

1°) Schreiben an Herrn Sinologus Berolinensis.

2°) Zweites Schreiben an Herrn Sinologus Berolinensis.

3°) Drittes Schreiben an Herrn Sinologus Berolinensis Antonio Montucci.

De la part de Mr. le Professeur Stoïkovitsch:

О предохраненіи себя отъ ударовъ моліи во всѣхъ случаяхъ жизни. Въ Харковѣ 1810. 8vo.

De la part de S. E. Mr. d'Ouvaroff:

Projet d'une Académie Asiatique. St. Pétersbourg 1810. in 4to.

De la part des Auteurs, Traducteurs ou Editeurs:

Jeografia, czyli Opysanie matematiczne i fisiczne ziemi; przez Jana Sniadeckiego. w Wilnie 1809. 8vo.

Slownik Jesyka Polskiego, przez M. Samuila Bogumila Linde etc. Tom II. Czesz 1. M — O. w Warsawie 1809. 4to.

Russisches Jahrbuch für die Chemie und Pharmazie, von F. Giese und D. H. Grindel. 1ter Band Riga 1809.

Sopra una medaglia d'Augusto. Dissertatione di Stello Doria Prossalendi. Firenze 1809. 4to.

De l'usage des Anastomoses dans les vaisseaux des machines animales, et particulièrement de la circulation du sang; par

Michel Araldi, Membre de l'Institut national Italien etc. Modène 1806. 8vo.

Δημητριου Παναγιωταδου του Τοβδελα κ. τ. λ. Στοιχεια Αλγεβρας. Ἐν Ἁλλῃ τῇ Μαγδεβουργικῇ 1806.

Grundrifs der theoretischen Physik, zum Gebrauch für Vorlesungen; von G. Fried. Parrot. 1r Theil. Dorpat 18 9. 8vo.

Землеописаніе Россійской Имперіи, для всѣхъ состояній; С. Петербургскаго Педагогическаго Института ординарнаго Профессора Евдокима Зябловскаго. Часть I - VI. въ С. П. Б. 1810. 8vo.

Nereis Britannica, continens species omnes fucorum in insulis Britanniae crescentium, descriptione latina et anglica, nec non iconibus ad vivum depictis. Auctore J. Stackhouse. Bathoniae 1801. Folio maj.

Notice sur un remède propre à remplacer le Quinquina en beaucoup de cas, découvert et publié par le Docteur Rehmann, Conseiller de Cour, etc. suivie d'une Analyse chimique de cette substance; par F. F. Reufs, Professeur de Chimie à l'Université de Moscou.

Theorie der Kraft, welche in den Haarröhren und bei ähnlichen Erscheinungen wirkt; von P. S. La Place, Kanzler des Senats; frey übersetzt mit einigen Anmerkungen und Zusäzzen von Brandes und Gilbert.

Traité d'Acoustique; par E. F. F. Chladni. Paris 1309. 8vo.

Recherches sur les réfractions extraordinaires qui ont lieu près de l'horison; par Mr. Biot. Paris 1810. 4to.

Précis des mémoires de B. G. Sage Fondateur et Directeur de la première Ecole des Mines etc. Paris 1809. 8vo.

De la nature et des propriétés de huit espèces d'électricité; par B. G. Sage. Paris 1809. 8vo.

Théorie de l'origine des montagnes et de l'accrétion quotidienne de la masse solide du globe, avec des conjectures sur la cause des subversions qu'il a éprouvés; par B. G. Sage. Paris 1809. 8vo.

Chemische Unternehmungen, mineralischer Substanzen etc.

Fortsetzung des chemischen Laboratoriums von J. F. v. John etc. Berlin 1810. 8vo.

Essai sur le Tetanos Rabien, ou recherches et réflexions sur la cause des accidens qui sont la suite des morsures faites par les animaux dits enragés; par le Dr. Girard. Lyon 1809. 8vo.

Saggio di un metodo per formare dei buoni Medici, proposto da Leonardo Vordoni. Padova 1808. Folio.

Teoria della resistenza dei corpi molli; di Daniele Francesconi. Padova 1809. 4to.

Doutes et conjectures sur la Déesse Nahalennia; par Charles Pougens. Paris 1810. 8vo.

Ueber einen elektrischen Telegraphen; von Samuel Thomas Sömmerring. München 1809.

Del Regolamento dei fiumi, Trattato teorico pratico di Francesco de Grandi etc. Vienna e Triesta 1810. 8vo.

Der alten Gothischen Kapelle zu Frankenberg Grundriſs, Aufriſs und Durchschnitt, nebst Gedanken über die sogenannte Gothische Baukunst; von Bernard Hundeshagen. Frankfurt am Mayn 1808. Folio.

Fragmente aus der Mineralogie; von Moriz v. Engelhardt etc. Erstes Heft. Mitau 1810. 8vo.

Versuch einer kritischen Literatur der Russischen Geschichte, 1ter Theil, enthaltend die Literatur der ältern allgemeinen nordischen Geschichte; von Joh. Gottl. Buhle. Moskwa 1810. 8vo.

Notice des fossiles du Gouvernement de Moscou. Recherches sur les Hydnophores; par le Professeur Fischer, Directeur perpétuel. Moscou 1810. 4to.

Exposé des effets de la contagion nomenclative et réfutation des paradoxes qui dénaturent la Physique; par B. G. Sage. Paris 1810. 8vo.

Flore des environs de St. Pétersbourg et de Moscou; par Jo-

seph Liboschitz et Charles Trinius, Medecins. 1r Cahier St. Pétersbourg 1810. 4to.

2. *Pour le Cabinet d'Histoire naturelle:*

Par Ordre de SA MAJESTÉ L'EMPEREUR:

1°) Le squelette de Mamouth, monté par Mr. l'Adjoint Adams.

2°) Un os de Mamouth (Os femoris) de grandeur extraordinaire, trouvé dans la rivière d'Oby, District de Malychefsk, cercle de Kolyvan.

3°) Un foëtus d'agneau monstrueux empaillé, consistant en deux corps distincts et complets, terminés en un seul col, surmonté d'une seule tête.

De la part de S. E. Mgr. le Chancelier de l'Empire:

Une tête de Bison musqué, trouvée dans la rivière d'Yana.

De la part de l'Archimandrite Sophrony (Gribovski).

Une boëte avec des insectes Chinois qu'on appelle là Fou-tjel.

De la part de Mr. de Waxell:

1°) Un Lion; 2°) une Antilope d'Afrique; 3°) un nid de Salangane (Hirundo esculenta) mangeable; 4°) un Curculio Imperialis sous une louppe; 5°) un fragment du palais d'un Cétacée inconnu; 6°) trois Squalus Acanthias; 7°) une espèce de Trigla, 8°) un Squalus centrina.

De la part du Marchand Chabounin à Kola:

1°) Un foetus de veau marin (Phoca oceanica).

2°) Squalus canicula.

3°) Anarhichas Lupus.

4°) Cyclopterus Lumpus.

5 et 6°) Deux exemplaires d'Asteries (Caput Medusae).

De la part de Mr. le Médécin Keller:

Un tissu de chenille, remarquable par sa grandeur, trouvé dans un Jardin à Munich.

De la part de Mr. l'Académicien extraordinaire Sevastianoff:

Un Bézoar de grandeur extraordinaire, trouvé dans l'estomac d'une vache.

3. *Pour le Cabinet de Minéralogie:*

Envoyé par ordre de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR:

Une bourse et une paire de gants tricotés de fil d'Amianthe.

De la part de la Direction du Cabinet Impérial d'histoire naturelle à Vienne:

Une boëte contenant trois fragmens d'aërolithes, tombés à Stannern en Moravie.

De la part de Mr. le Conseiller de Colléges Bornovolokoff:

1°) Une grande et belle table de Domanite poli.

2°) Un fragment de Domanite dans son état brut.

3°) Une phiole remplie de Petrole gras (Bitumen Petroleum).

4°) Une petite boëte remplie de crayon préparé du Domanite.

De la part de Mr. l'Adjoint Langsdorff:

Quatorze cristaux; savoir: quatre topazes (monostique, dioctaë-

dre, à double sommet, soustractif); six spinels (primitif, soustractif, transposé, primitif-segminiforme, primitif cunéiforme; émarginé); trois Cymophanes (cristallisé, roulé, amorphe) et un Zircon de Ceylon.

De la part de Mr. Karounofski, Précepteur du Gymnase de Poltawa:

1°) Plusieurs échantillons de Sélénites et de Bélemnites.

2°) Un fragment de bois pétrifié.

3°) Une pierre de chaux sablonneuse et quelques morceaux de pierre calcaire compacte.

le tout des Environs de Poltawa.

De la part de Mr. le Conseiller de Cour Fischer à Moscou:

Quelques échantillons de toutes les variétés du Radofkite, nouveau fossile.

De la part de l'Auteur:

Essai de Géologie, ou Mémoires pour servir à l'histoire naturelle du globe; par Mr. Fauyas St. Fond. Tome 1. Paris 1803. 8vo. (avec figures.)

De la part de S. E. Mr. l'Académicien Fufs:

Recueil des noms par ordre alphabétique, appropriés en Minéralogie aux terres et pierres, aux métaux, et demi-métaux et aux bitumes; avec un précis de leur histoire naturelle et leurs Synonymies, en allemand, latin et anglois etc.: par le Prince Dimitri de Gallizin etc. Brunswik 1802. Folio.

De la part de S. E. Mr. le Capitaine en Chef des Mines Hermann:

Dixhuit divers fossiles des mines de sa dépendance.

De la part de Mr. Jani:

Un morceau d'écume de terre (espèce de la chaux carbonatée nacrée du Système de Haüy) trouvé à Rubitz près de Gera.

De la part de l'Auteur:

Catalogue par ordre chronologique, des météores, à la suite desquels des pierres, ou des masses de fer sont tombées; par E. F. F. Chladni.

4. *Pour le Cabinet de Curiosités:*

Envoyé par ordre de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR:

1°) Une poisson d'or.

2°) Deux ailes d'oiseau et

3°) Un queue d'oiseau du même métal. (Ces antiquités ont été trouvées dans les Environs d'Elisabethgrad).

4°) Armes et armatures militaires du Japon, tels que cottes d'armes, casques, carquois, flèches, fusils, pistolets, sabres, javelots, habillemens militaires, livres, services de table, tasses, casseroles, fourchettes, cabarets, réchauds et plusieurs autres curiosités Japonoises.

5°) Un casque à plumet, un manteau et un bâton du Roi des Iles de Sandwich.

6°) Un livre fait d'herbes, du travail des Aléutes Russes.

Envoyé par S. E. Mgr. le Ministre de l'Intérieur:

Des fragmens d'une Chaine d'or, trouvés dans le cercle d'Olviopol, dans la Colonie Nadlaka, par le Coloniste Trouswitch.

De la part de Mr. de Waxell:

1°) Trois Idoles des Iles de Falkland, Otaheiti et Sandwich.

2°) Un pâtoupatou des mêmes îles.

3°) Quelques échantillons d'étoffe faite du Morus papyrifera, des mêmes îles.

4. *Pour le Jardin botanique.*

De la part de Mr. le Conseiller des Mines Schanguine à Barnaul:

Une collection de semences, en tout 41 paquets, recueillies en Daourie et dans les monts Altaïques.

6. *Pour la Bibliothèque de l'Observatoire.*

De la part du Bureau des Longitudes à Londres:

The nautical Almanac and astronomical Ephemeris for the year 1813, published by ordre of the Commissioners of Longitude. London 1808. 8vo.

De la part de Mr. Nevil Maskelyne, Astronome Royal à Greenwich:

1°) Astronomical Observations, made at the Royal Observatory at Greenwich, from 1787 to 1798; by the Reverend Nevil Maskelyne. Vol. III. London 1799. Folio.

2°) Astronomical Observations, made at the Royal Observatory at Greenwich, in the year 1807; by the Reverend Nevil Maskelyne; part of Vol. IV. London 1808. Folio.

De la part de Mr. Bode, Astronome à Berlin:

1°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1812; herausgegeben von J. E. Bode. Berlin 1809.

2°) Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1813 u. s. w.; berechnet und herausgegeben von J. E. Bode. Berlin 1810. 8vo.

IV.

MÉMOIRES ET AUTRES OUVRAGES MANUSCRITS, PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE.

О красильномъ искусствѣ. Продолженіе; par Mr. Sevastianoff.

О драгоцѣнныхъ и полудрагоцѣнныхъ камняхъ, и о средствахъ узнавать и цѣнить ихъ. Сочин. Г. Дюмонса: par Mr. Sevastianoff.

Продолженіе разсужденія о Металлургіи, второе отдѣленіе, о полуметаллахъ; par Mr. Severguine.

О кривизнѣ кривыхъ Линій на поверхности шара описанныхъ; par Mr. Fuſs.

Ueber die im Jahre 1805 angestellten Fluth-Beobachtungen im Hafen von Nangasaki; par Mr. le Capitaine de Krusenstern.

О среднихъ соляхъ, по новому словозначенію. Переводъ Гертаннера; par Mr. Zakharoff.

Mémoire sur le Domanite, ou Ardoise bitumineuse de Vologda; par Mr. Bornovolokoff.

Calcul des observations de la grande Comète de 1807, faites à l'Observatoire de St. Pétersbourg; par Mr. Schubert.

Прибавленіе II къ сочиненію объ общемъ правилѣ равновѣсія, приложенномъ къ машинамъ; par Mr. Gourieff.

Записка о сохраненіи птичьихъ чучелъ и насѣкомыхъ; par Mr. Bornovolokoff.

Записка о приготовленіи изъ доманита чернаго мѣла или карандаша для рисованія; par Mr. Bornovolokoff.

Des sources de la valeur; par Mr. Storch.

Народныя таблицы сочиненныя по Екатеринбургскимъ Горнымъ Заводамъ, на 1802-1806 годы; par Mr. Hermann.

О достопамятной, по величинѣ своей, пряжѣ дѣлаемой гусеницами двухъ породъ мольныхъ ночныхъ бабочекъ; par Mr. Sevastianoff.

Dissertatio exhibens novissimas plantas Sibiriae orientalis; par Mr. Rudolph.

Ueber den Rhabarberhandel in Kjächta; par Mr. le Docteur Rehmann.

Holzsparende Küche, seit mehreren Jahren in Gatschina mit gutem Erfolg etablirt und erfunden von dem Hrn. Geheimenrath und Senateur Teploff; par Mr. Krafft.

Топографическое описанiе Полтавской Губернiи; par Mr. Korounovski.

Описанiе брусяныхъ горъ печерской и войской, находящихся Вологодской Губернiи въ Устьсысольскомъ округѣ; par Mr. Bornovolokoff.

Практическое изслѣдованiе турфа; par Mr. Schlegelmilch.

Ботаническiя письма, писанныя къ Его Сiятельству Князю Петру Яковлевичу Долгорукому; par Mr. Smélovski.

Histoire de l'Académie IMPÉRIALE des Sciences. Années 1807 et 1808; par Mr. Fuſs.

Изслѣдованiя о приличнѣйшемъ очертанiи зубцовъ колесъ; par Mr. Wiscovatoff.

Выписка метеорологическихъ наблюденiй, дѣланныхъ въ С. Петербургѣ при Императорской Академiи Наукъ въ 1808 году; par Mr. Petroff.

Словарь Уналашкинскаго, Кадьякскаго, Кинайскаго, Чугочьскаго, Угаляхмутскаго и Колюжскаго языковъ, по Россiйскому Алфавиту; par Mr. le Chambellan de Rézanoff.

Observations astronomiques, faites à l'Observatoire de Mitau, dans dans le Gouvernement de Courlande; par Mr. Beitler.

Geschichte der Mandschuischen Völkerschaften; par Mr. Klaproth.

Dissertatiuncula, qua nova aberrationis luminis explicatio tentatur; par Mr. le Professeur Huth.

Ueber den souffre carburé; par Mr. Scherer.

Ueber die streitigen Regierungs-Jahre der griechischen Kaiser

Leo und Alexander. Ein Beitrag zur Berichtigung der Byzantinischen Chronologie; par Mr. Krug.

Ueber das nächtliche Leuchten des Meerwassers durch lebendige Thiere, welche bey Gelegenheit der Krusensternschen Erdumseglung microscopisch beobachtet worden; par Mr. Tilésius.

Vorschlag zur Beförderung und Aufmunterung des Seidenbaues, für das südliche Rufsland, nebst einem Unterricht in der Maulbeerbaumzucht, par Mr. Zigra.

Abhandlung über den zweckmäfsigen Anbau und Benutzung der Seidenpflanze (Asclepias Syriaca); par Mr. Zigra.

Differenzial-Rechnung ohne Differenzial-Gleichungen; par Mr. Blasche

Обозрѣніе Киргизъ-Кайсацкой степи, или описаніе страны и народа Киргизъ-Кайсацкаго. Часть II; par Mr. Gaverdovski.

Observation sur un poisson nommé improprement hareng; par Mr. Ozeretskovski.

Sur le nombre des habitans de la Russie et sur les progrès de sa population, d'après les états faits par ordre du Gouvernement; par Mr. Herrmann.

Ueber die fabrikmäfsige Bereitung des Salmiaks und Berlinerblaues, nebst den dabei zu gewinnenden Nebenprodukten; par Mr. Nassé.

О невоспламеняемости нѣкоторыхъ воздухообразныхъ и многихъ жидкихъ весьма горючихъ тѣлъ отъ калильнаго жара; par Mr. Pétroff.

Beschreibung der Wasserfälle des Dnieprs, zur Erläuterung der ältesten Nachrichten von demselben; par Mr. Lehrberg.

Chinesische Nachrichten vom Mammuth; par Mr. Klaproth.

Bemerkungen über die Entstehung einer neuen Insel, in der Nachbarschaft von Unalaschka; par Mr. Langsdorff.

Labraces, novum genus piscium, Oceani orientalis; par Mr. Pallas.

Alyssi rostrati et Erodii serotini descriptio; par Mr. le Dr. Steven.

Ueber die Sprache der Bomanen und ihre ältere Verbindung mit China; par Mr. Klaproth.

Beschreibung einiger neuen Fischarten von Kamtschatka; par Mr. Langsdorff.

О сожиганіи зажигательными зеркалами и стеклами различныхъ многосложныхъ твердыхъ горючихъ тѣлъ, въ такихъ газахъ, въ которыхъ горящія тѣла мгновенно погасаютъ; par Mr. Petroff.

Минералогическое обозрѣніе горъ, по рѣкѣ Кунарѣ, на восточной сторонѣ Уральскаго хребта лежащихъ; par Mr. Schlegelmilch.

Novae disquisitiones de seriebus per cosinus angulorum multiplorum progredientibus; par Mr. Fuſs.

Probe einer bisher noch unbekannten Sprache Asiens; par Mr. Klaproth.

Исторія нѣкоторыхъ открытій; par Mr. Sevastianoff.

О переселеніи животныхъ; par le même.

Einige naturhistorische Beiträge und Bemerkungen; par Mr. Langsdorff.

Démonstration de quelques théorèmes arithmétiques; par Mr. Fuſs.

Joh Redofsky's, Adjuncts der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Tagebuch einer in den Jahren 1805 und 1806 von Kjachta nach Urga und von Irkutsk nach Ishiginsk unternommenen Reise.

Disquisitio statica super casu quodam aequilibrii; par Mr. Fuſs.

Observations minéralogiques, faites dans le Gouvernement de Twer; par Mr. Severguine.

Ueber die Alaunfabrikation aus Alauerzen, und über Curaudeau's Verfahren durch synthetische Zusammensetzung der Bestandtheile; par Mr. Nassé.

Переводъ о металлахъ и о [illegible] Химіи Гиртаннера, по новому словознáченію; par Mr. Zakharoff.

Des choses qui sont susceptibles d'avoir de la valeur. Analyse des différentes espèces de biens; par Mr. Storch.

Замѣчаніе о неестественномъ устроеніи щитообразнаго хряща, какъ причинѣ Косоязычія; par Mr. Zagorski.

Auszug aus den Barometer und Thermometer-Beobachtungen, welche in den Jahren 1795 bis Ende 1808 täglich in Riga angemerkt worden; par Mr. Sandt.

Archiv für Asiatische Litteratur. 1r Volume; par Mr. Klaproth.

Verzeichnifs der im Monath October 1809 in St. Petersburg zu Markte gebrachten Vögel, nebst allgemeinen Bemerkungen darüber; par Mr. Langsdorff.

Первостатейныя (Primates) родъ 1. человѣкъ (Homo); par Mr. Sevastianoff.

Continuatio Prodromi Florae Petropolitanae, classis II. Diandria Monoginia; par Mr. Smélovski.

О способѣ находить наибольшія или наименьшія величины неопредѣленныхъ интегральныхъ формулъ. Отдѣленіе 2; par Mr. Viscovatoff.

Observations faites à l'Observatoire de l'Académie; par Mr. Schubert.

Ueber diejenigen Chinesischen Charactere, welche eine Bezeichnung des Tons in sich schliefsen; par Mr. Klaproth.

Verzeichnifs der im Monath November 1809 in St. Petersburg beobachteten Vögel, nebst allgemeinen Bemerkungen; par Mr. Langsdorff.

Neue Methode den Kohlensäure-Gehalt der Mineral-Wässer zu bestimmen; par Mr. Scherer.

Chronologie der Byzantier, während der Regierung der Kaiser Leo, Alexander, Konstantin Porphyrog., Roman Lapaken, und Roman Porphyrog., in dem Zeitraum vom 30. August 886 bis 15. März 963; berichtigt von Philipp Krug.

Географическій и Топографическій Журналъ; par Mr. Kojevin.

De squeleto mammonteo Sibirico, iconibus illustrando, cute pilosissima et carne obducto, nuperrimeque (1807) ad ostium Lenae fluvii effosso, praemissis quibusdam Elephantini generis specierum distinctionibus; par Mr. Tilésius.

Integratio formulae $\partial y = \frac{\partial x}{(1+x)\sqrt{2x^2-1}}$; par Mr. Kausler.

Des séries qui expriment les sinus et cosinus des angles multiples par les sinus et cosinus des angles simples; par le même.

Considérations sur les Camtschadales et sur le Camtschatka; par Mr. Herrmann.

О Метеорахъ, или о камняхъ падающихъ изъ Атмосферы; par Mr. Bornovolokoff.

Extrait des observations météorologiques faites à St. Péterbourg. Années 1807 et 1808; par Mr. Pétroff.

Animalia Monocardia, seu frigidi sanguinis Imperii Rosso-Asiatici; recensente P. S. Pallas; cum figuris Tab. I — XCIX.

Словарь химическій обработанный въ отношеніи къ Технологіи, по химическому Словарю Г. Кадета. Томъ I. отъ А. до Л.; par Mr. Severguine.

Геогнозія или наука о горахъ, съ присовокупленіемъ наставленій путешествующему Геологу, почерпнутыхъ изъ 4го тома путешествія по Альпійскимъ горамъ Г-на Соссюра; par Mr. Sevastianoff.

Ueber die geographische Lage und die Geschichte des im Russisch-Kaiserlichen Titel genannten Jugorischen Landes; par Mr. Lehrberg.

Der Bau der Erde, eine Untersuchung; par Mr. Trinius.

Von der Tatuirung auf den Marquesas- und Washingtons-Inseln. Ein Beitrag zur genauern Kenntnifs der Bewohner dieser Inselgruppen, aus den Bemerkungen auf einer Reise um die Welt unter Commando des Cap. v. Krusenstern; par Mr. Langsdorff.

Beschreibung einiger merkwürdigen Fossilien aus dem Tambackischen Gebirge in Georgien; par Mr. Schlegelmilch.

Fortsetzung des astronomischen Beobachtungs-Journals; par Mr. Wisnievski.

Ueber ein neues aus schweflichter Säure, Schwefel, Quecksilberoxyd und Kali bestehendes Salz; par Mr. Kirchhoff.

Entdeckung eines Mittels den Russischen Thon so zu bearbeiten, daſs derselbe die Stelle des Englischen und des Hessischen Thons vollkommen vertreten kann, so daſs man dauerhafte mehrmals zu brauchende groſse Schmelztiegel für Glas- und Spiegel-Fabriken aus demselben bereiten kann; par Mr. Grindel.

Observations et réflexions sur les marées dans le port de Nangasaki en 1805; par Mr. de Krusenstern.

Примѣчанія о теченіи моря, чиненныя въ Нангазаки, отъ 10 Генваря по 17 Апрѣля 1805; par le même.

Méthode particulière pour trouver le tems par la mesure des distances du Soleil à un point dont l'Azimuth est connu; par Mr. van Beeck Calkoen.

De sphaeris osculantibus; par Mr. Fuſs.

Observations faites à l'Observatoire de l'Académie Impériale des Sciences; par Mr. Schubert.

Examen liliorum Japonicorum; par Mr. Thunberg.

De quantitate radii curvedinis Curvarum duplicis curvaturae, deque circuli osculantis positione, facillime indagandis; par Mr. Fuſs.

Выписка метеорологическихъ наблюденій, учиненныхъ въ С. Петербургѣ, при Императорской Академіи Наукъ, 1809 года; par Mr. Pétroff.

Sur les pierres alumineuses des monts Ararat; par Mr. Severguine.

Analyse des notions de richesse individuelle et de richesse nationale; par Mr. Storch.

О Россійскомъ химическомъ словозначеніи разсужденіе; par Mr. Zakharoff.

De functionum hyperbolicarum origine, proprietatibus, relatione et usu; par Mr. Fufs.

Правила движенія перемѣннаго, произведенныя изъ началъ трансцендентной Геометріи; par Mr. Gourieff.

Remarques sur le crane du bison musqué; par Mr. Ozeretskovski.

De ganglio rami descendentis nervi hypoglossi medii; par Mr. Zagorski.

Ueber die zweckmäfsige Einrichtung der Schwefel-Säure-Fabriken, nach den bisherigen Erfahrungen und auf wissenschaftliche Grundsätze zurückgeführt, nebst Bemerkungen über das Geschichtliche der Schwefel-Säure-Fabrikation; par Mr. Nasse.

Разсужденіе о нѣкоторыхъ достойныхъ примѣчанія млекопитающихъ животныхъ, хранящихся въ Музеѣ Академіи Наукъ; par Mr. Sevastianoff.

Разсмотрѣніе растѣній съ философической стороны; par Mr. Smélovski.

О способѣ находить наибольшія или наименьшія величины неопредѣленныхъ интегральныхъ формулъ; par Mr. Viscovatoff.

Наблюденіе касательно употребленія цинка; par. Mr. Zagorski.

Beschreibung eines Onemescops von der allerhöchsten Vollkommenheit in Hinsicht auf Einrichtung, Brauchbarkeit und Eleganz; par Mr. Römheld.

Nöthige Bemerkung über die so wünschenswerthe allgemeine Beobachtung und Bekantmachung der sich ereignenden Naturveränderungen; par le même.

Наставленіе о собираніи, приготовленіи и сбереженіи нарывныхъ или Шпанскихъ мухъ, съ означеніемъ въ ономъ тѣхъ полуденныхъ Россіи губерній, въ коихъ онѣ преимущественно водятся; par Mr. Smélovski.

Словари Моторскаго, Койбальскаго, Остяцкаго, Качинскаго, Кольскаго, Соетскаго, Калмыцкаго и Ойретскаго языковъ; par Mr. Spaski.

О древнихъ письменахъ и высѣченныхъ знакахъ сходныхъ съ буквами и представляющихъ разные предметы, открытыхъ близъ Саянскихъ и Алтайскихъ горъ; par le même.

Ueber das Denkmahl des Chinesischen Kaisers *Yûi*, welches in China unter dem Namen *Yui - bey*, Inschrift des *Yûi*, bekannt ist; par Mr. Klaproth.

De valore formularum integralium $\int x^n\, d\, x\, e^{-\alpha x}$ sin. βx et $\int x^n\, dx e^{-\alpha x}$ cos. βx, si integralia ab $x = 0$ ad $x = 1$ usque extendantur; par Mr. Fufs.

Sur les Conciles généraux du moyen age; par Mr. de Chambrier.

Ueber die Mischung des Pyrophors; par Mr. Scherer.

Erklärung einiger vorhandenen Wörter in Nestors Chronik; par Mr. Krug.

Fortsetzung des astronomischen Beobachtungs - Journals; par Mr. Wisnievski.

Piscium Camtschaticorum descriptiones et icones; par Mr. Tilésius.

Extrait des observations météorologiques faites à St. Pétersbourg, année 1803, vieux stile, par feu Mr. Inochodzoff; rédigé par Mr. Pétroff.

Sur la répartition du nombre total des habitans de la Russie; par Mr. Herrmann.

Ueber die Reinigung der Oele durch Schwefel Säure in Frankreich, und über die chemische Wirkung der Sauren auf Thier- und Pflanzen - Stoffe im Allgemeinen; par Mr. Nassé.

Ueber die Fabrikation des Burlâts der Bucharen und Perser; par Mr. Wuttig.

Description d'un Tetras, ou d'une espèce particulière d'oiseau très-peu connu, qui se trouve aux environs de St. Pétersbourg; par Mr. Langsdorff.

Ueber eine leichte und wohlfeile Bereitungsart des schweflicht-sauren Schwefelkali; par Mr. Kirchhoff.

Continuation des observations astronomiques, faites depuis le 12 Juillet jusqu'au 17 Août; par Mr. Wisnievski.

Demonstratio theorematum quorundam polygonometricorum; par Mr. Fuſs.

Demonstratio theorematum quorundam calculum integralem spectantium; par Mr. Fuſs.

Introductio in physiologiam fungorum; par Mr. le Dr. Liboschitz.

Outre cela l'Académie a reçu régulièrement, dans le courant des deux années, les observations météorologiques faites à Astrachan, à Catherinbourg, à Nicolaeff et à Kief.

V.

OBSERVATIONS, EXPÉRIENCES, ET NOTICES INTÉRESSANTES, FAITES ET COMMUNIQUÉES À L'ACADÉMIE.

1. Sur l'inclinaison et la déclinaison de l'aiguille magnétique à Kharkoff.

Mr. *Huth*, Professeur à Kharkoff, communiqua à l'Académie, dans une lettre adressée au Secrétaire, le résultat de ses recherches sur l'inclinaison et sur la dé-

clinaison de l'aiguille magnétique, instituées à Kharkoff, avec une aiguille de 10 pouces tant inclinatoire que déclinatoire. Il a trouvé l'inclinaison = 66°, 15′ et la déclinaison 5°, 4′ Ouest.

2. Sur un Surrogat du Quinquina.

Mr. le Docteur *Rehmann*, ci-devant Médécin de l'Ambassade à la Chine, àprésent Médécin de S. E. Mgr. le Comte *Razoumovski*, Ministre de l'Instruction, envoya de Moscou deux boëtes remplies d'une substance végétale indigène, propre à tenir lieu du Quinquina dans la cure des fièvres, avec la prière de faire examiner chymiquement cette substance, et de vouloir bien lui communiquer le résultat de l'analyse chymique. Une de ces boëtes fut donnée à Mr. l'Académicien extraordinaire *Scherer*, qui se chargea d'examiner les parties constituantes de ce nouveau Surrogat de l'écorce Peruvienne.

3. Sur un project de renforcer les eaux salées par l'évaporation.

S. E. Mr. le Conseiller privé et Sénateur *Néplouyeff*, membre du Comité, nommé pour examiner les projets d'exploitation des sels dans l'Empire, ayant trouvé qu'un project présenté par Mr. le Conseiller de Collège *Safonoff*,

est fondé sur quelques suppositions concernant le degré d'évaporation des eaux salées en plein air, adressa à l'Académie quatres questions, avec la prière de lui faire passer son opinion ou conclusion au sujet de ces questions. La Conférence nomma un Comité composé de Mrs. les Académiciens *Krafft*, *Ozeretskorski*, *Schubert*, *Severguine*, *Zakharoff*, *Sevastianoff*, *Schérer* et *Pétroff*, qui donnèrent ensuite leurs avis à la Conférence, pour être transmis à Mr. de *Néplouyeff*.

4. Sur une découverte de Mr. l'Acad. extraord. Klaproth.

Mr. l'Academ. extraord. *Klaproth*, fit part à la Conférence d'une découverte à laquelle l'ont conduit depuis peu ses recherches sur les langues de l'Amérique et celles de l'Asie septentrionale. Mr. *Klaproth* a trouvé une grande chaine de nations et d'idiomes qui depuis le canal de le Reine Charlotte, s'étend le long de la côte Nord-Ouest de l'Amérique sur le Canada méridional, les Etats unis, la Louisiane, la Floride, les grandes et petites Antilles, les îles Caraïbes et la Guiane, jusqu'à la rivière des Amazones, dont les chainons sont les dialectes d'une langue mère qui a beaucoup d'affinité avec celle des Samojèdes et des Kamtchadales, et dont les nations ressem-

blent aussi, par leur figure et leur genre de vie, aux nations de l'Asie septentrionale. Mr. *Klaproth* donne un échantillon de mots Caraïbes qui se trouvent dans les langues des Mandshou, des Samojèdes, des Koryäks, des Youkaguirs, des Toungouses, des Kamtchadales, des Tchouktchis etc.

5. Sur une chaux sulfatée trouvée aux environs de Poltava.

Mr. *Karounovski*, Instituteur au Gymnase IMPÉRIAL de Gouvernement à Poltava, manda que près du village Petrofka, à dix verstes de la ville de Poltava, on a découvert de la chaux sulfatée ou du Sélénite en cristaux, dont il donne la déscription, en ajoutant que dans les éboulemens ou crevasses, où l'on trouve ces Sélénites, on rencontre aussi quelquesfois des Bélemnites. Il envoya dans la suite des échantillons des uns des autres.

6. Sur les résultats d'un voyage de Mr. Wuttig.

Mr. *Wuttig*, Adjoint de l'Université IMPÉRIALE de Kazan, communiqua à l'Académie plusieurs observations et découvertes, qu'il a eu l'occasion de faire pendant un voyage scientifique par les Gouvernemens d'Orenbourg, de Perme et de Viätka, et à leur suite un apperçu sur les fabriques en général, sur leur perfectionnement en Russie,

et sur les fondemens de la Technologie, envisagée comme science, avec des tableaux systématiques de la Technologie mathématique et chymique. La Conférence a fait insérer ces notices et aperçus dans le Journal technologique.

7. Sur la préparation du Thé Bohé et du Thé en briques.

S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski* ayant trouvé dans le manuscrit du Géodesiste Kojevine, qu'il avoit été chargé d'examiner, une notice, *sur la préparation du Thé Bohé et du Thé en briques*, qui lui avoit paru mériter l'attention du Gouvernement, il en présenta un extrait pour être communiqué au Ministre de l'Intérieur. Mais considérant 1°) que depuis fort longtems on connoit en Europe, comme Surrogats du Thé, *la Rosa canina* ou *silvatica* et beaucoup d'autres plantes, parmi lesquelles il y en a que même les Chinois ou mêlent avec le Thé véritable, ou employent sans mélange, comme le *Lycium barbarum;* considérant 2°) que l'auteur, dont les connoissances botaniques ne peuvent pas inspirer une grande confiance, ne dit pas d'où il a tiré ses notices: la Conférence fut d'avis qu'avant d'en faire l'usage que propose Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, il faudra prendre à Irkoutsk des informations sur leur authenticité. Le Secrétaire se chargea d'en transmettre une copie à Mr. *Müller*; Directeur du

Gymnase de cette ville, et de le prier de prendre des informations ultérieures sur l'authenticité des procédés indiqués par le *Géodésiste Kojevine.*

8. Sur un nouveau fossile nommé Ratofkite.

Mr. *Fischer,* Directeur perpétuel de la Société IMPÉRIALE des Naturalistes à Moscou, envoya des échantillons de toutes les variétés du Ratofkite, nouveau fossile qu'il a découvert sur les bords de la Ratofka.

9. Sur le Lichen esculentus et le Lichen corolloides.

S. E. Mr. l'Académicien *Pallas* manda, d'avoir trouvé, en révisant sa collection de plantes, une provision *du Lichen esculentus*, que les Cosaques de l'Ural connoissent sous le nom de pain du désert, et dont ils se nourrissent en tems de disette. Et comme l'Apothicaire *Stehlin* à Sarepta a tiré de la Gomme du *Lichen coralloïdes*, en croyant que c'étoit du *Lichen esculentus*, Mr. *Pallas* envoye de l'un et de l'autre, étant d'avis qu'il seroit intéressant de les examiner chymiquement, afin de s'assûrer lequel contient le plus de substance gommeuse. La Conférence remit ces deux portions de Lichen à Mr. l'Adjoint *Kirchhoff* et le chargea d'instituer cet examen.

10. Analyse de quelques fossiles.

Mr. l'Académicien *Klaproth* à Berlin manda au Secrétaire d'avoir examiné les trois corps fossiles, qu'il lui avoit transmis, il y a quelque tems, de la part de l'Académie, savoir le *Feldspath*, trouvé dans le Granite de Finlande, le *Marekanite* d'Okhotsk et le *Domanite* de Wologda. Cette Analyse lui a fait voir que le premier fossile ne diffère en rien du Feldspath ordinaire, et que le Marekanite n'est qu'une variété du Perlite. Quant à l'ardoise charbonneuse de Wologda, Mr. *Klaproth* a trouvé que 200 grains en contiennent les parties constituantes suivantes :

Gaz hydrogène carboné .	80	pouces cub.
Huile empyreumatique . .	30	grains
Huile bitumineuse . .	5	—
Eau ammoniacale . .	4	—
Charbon	20	—
Silice	87, 50	
Alumine	6, 50	
Chaux	10, 50	
Manganèse . . .	1	—
Oxyde de fer . . .	3	—

11. Sur le Savon arsénical de Bécour.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Sevastianoff* communiqua la recette pour la composition du savon arsénical de Bécour, comme moyen de préserver les animaux empaillés contre la teigne, et il proposa de faire au Musée des essais comparatifs avec ce savon et un autre moyen préservatif sans poison, proposé autrefois par Mr. l'Abbé *Manesse*. La Conférence approuva la proposition et chargea Mr. *Sevastianoff* d'instituer cet examen.

12. Sur les plantes dont on se sert comme d'un Surrogat du Thé.

Le Secrétaire lut une lettre de Mr. *Muller*, Directeur des Ecoles du Gouvernement d'Irkoutsk, à qui il avoit demandé des renseignemens sur les plantes dont, selon une notice du *Géodésiste Kojevine*, on se sert en plusieurs endroits, comme d'un Surrogat du Thé. Mr. *Müller* mande, que presque tous les habitans du Gouvernement d'Irkoutsk, Russes et Mongoux, tant habitans de village que Nomades, font un usage journalier du Thé, mais que le plus grand nombre, hors d'état d'acheter le Thé Chinois, a recours aux plantes qui croissent dans le voisinage et qui ont plus ou moins le goût, l'odeur, et les autres propriétés du Thé.

Ces plantes sont: *Saxifraga crassifolia; Pyrola rotundifolia; Clematis alba; Pyrola uniflora; Prunus padus; Spiraea coronata; Ulmus campestris, Polypodium fragrans; Rosa canina.* Beaucoup de personnes assûrent, dit-il, que les Chinois mêlent les feuilles des deux dernières plantes avec les feuilles du Thé véritable. Mr. *Müller* fait mention encore d'un Thé en briques qu'un nommé *Bakhmoutieff* a composé et vendu à Irkoutsk, il y a 4 ans; que ce Thé étoit fait de l'*Ulmus campestris* et du *Prunus Padus*; et qu'il avoit été très recherché, jusqu'à ce qu'on en eût défendu la vente au dit *Bakhmoutieff*, non obstant un attestat médicinal, que lui avoit donné Mr. le Docteur *Rehmann.*

13. Sur un nouveau fossile nommé Miaszite.

Le Secrétaire lut une lettre de Mr. le Docteur *Wuttig*, Professeur de Chymie, de Minéralogie et de Technologie de l'Université IMPÉRIALE de Kazan. Cette lettre contient les résultats de quelques expériences chimiques, instituées par Mr. *Wuttig*, sur un nouveau fossile qu'il a découvert et nommé *Miaszite*, par lesquelles il croit prouver que ce fossile ne contient que de la Strontiane combinée avec de la chaux, de l'acide carbonique, et d'un peu d'Oxyde de fer. Mr. *Wuttig* ayant envoyé, avec sa

lettre, un fragment très-pur de ce fossile, et prié l'Académie d'en faire faire l'Analyse par Mr. *Kirchhoff*, dont le premier examen a été fait sur un morceau moins pur, la Conférence résolut de transmettre ce fragment, avec une copie de la lettre de Mr. *Wuttig*, au dit Adjoint, afin qu'il puisse repéter les expériences de ce Chimiste habile et zélé.

VI.

RAPPORTS PRÉSENTÉS À L'ACADÉMIE PAR DES ACADÉMICIENS CHARGÉS DE COMMISSIONS PARTICULIÈRES.

1. Sur le commerce de la Rhubarbe à Kiachta.

Mr. le Docteur *Rehmann* ayant envoyé à l'Académie un mémoire intitulé: *Ueber den Rhabarberhandel in Kiachta*, Mr. l'Académicien extraordinaire *Klaproth*, chargé de l'examiner, en fit son rapport, contenant en substance: que ce mémoire est rempli de notices et d'observations neuves intéressantes, et qu'il et mériteroit d'être publié dans le Journal technologique; que dans cette vue lui, Mr. *Klaproth*, y a ajouté quelques notes et a corrigé les fautes qui se sont glissées dans les dénominations chinoises. La Conférence approuva la proposition de publier ce mémoire.

2. Sur une balance, de l'invention de Mr. Neviedomskoi.

Une balance, de l'invention de Mr. *Neviedomskoi* ayant été transmise, par ordre SUPRÈME, à l'Académie, pour y être examinée, Mr. l'Académicien *Zakharoff* chargé d'en faire l'examen, rapporta: que cette balance, comparée à l'ancienne balance Romaine, qui, malgré ses grandes et nombreuses imperfections, est encore si fréquemment en usage chez nous sous le nom de Безмѣнъ, présente plusieurs avantages qui la rendent supérieure, si non aux bonnes balances à bras égaux (c'est de quoi certainement elle est bien éloignée) du moins à la dite balance Romaine, et qu'à l'égard de celle-ci cette nouvelle invention ingénieuse, mérite la préférence. Mr. *Zackharoff* convient à la vérité, que cette balance est si peu sensible qu'une augmentation de poids de 24 Solotniks ou d'un quart de livre sur quinze, y devient absolument imperceptible, mais il propose un moyen qu'il croit propre à remédier à cet inconvenient et à rendre la balance plus sensible.

3. Sur deux mémoires de Mr. Zigra.

Mr. *Zigra*, Jardinier à Riga, ayant envoyé à l'Académie deux mémoires: 1°) *Vorschlag zur Beförderung und*

Aufmunterung des Seidenbaues für das südliche Rufsland etc. 2°) *Abhandlung über den zweckmäfsigen Anbau und Benutzung der Seidenpflanze (Asclepias Syriaca)* Mr. l'Académicien *Rudolph*, chargé de les examiner, en fit son rapport, contenant en substance: 1°) que ces mémoires ne traitant par un sujet purement scientifique, ne sont pas du ressort de l'Académie des Sciences, mais plutôt de la compétence de la Société économique; 2°) que le but de Mr. *Zigra* peut-être en soi très louable, mais que ses projets patriotiques ne contiennent rien de nouveau et viennent de beaucoup trop tard; attendu que par les soins de Mr. le Baron *Marschal de Biberstein* la culture du Mûrier et de la Soye est poussée dans la Russie méridionale aussi loin qu'elle peut y aller, et que depuis nombre d'années des milliers de poudes de soye crüe viennent de là à Moscou et St. Pétersbourg; 3°) qu'il en est de même du mémoire sur l'*Asclepias Syriaca*, vû que le Chirurgien-Major *Gehlen*, qui en 1794 avoit établi à Voronèje une plantation de 13000 plantes, a essayé la fabrication de la soie sur une multitude d'objets de Manufacture; mais que l'expérience ayant fait voir à Voronèje, aussi bien qu'en Silésie, combien cette soye végétale est inférieure à la véritable soye, tant pour la fermeté et la mollesse que pour l'éclat et la netteté, on a abondonné de-

puis cette spéculation inutile tant en Russie qu'en Allemagne.

4. Sur un mémoire de Mr. Blasche.

S. E. Mr. l'Académicien *Fuſs* fit son rapport sur un mémoire de Mr. *Blasche: Differenzial-Rechnung, ohne Differenzial-Gleichungen;* la substance en est: que l'auteur n'a point réussi à écarter, par son nouveau symbolisme, les difficultés, qui arrètent ordinairement les commençans dans l'étude du calcul différentiel, parceque les signes qu'il veut introduire pour cet effet sont incommodes, et que leur emploi n'offre aucune utilité réelle; mais que la tentative de Mr. *Blasche* est digne d'un accueil indulgent de la part de l'Académie, par la modestie, avec laquelle il la soûmet à son jugement, et par l'air de cohérence et de système qu'il a su lui donner; à quoi on peut ajouter, qu'une école inférieure, comme celle de la Cathédrale de Reval, peut se féliciter de posséder un maître des mathématiques doué des connoissances de Mr. *Blasche*, attendu qu'il y a des établissemens d'instruction publique, d'un rang plus élévé, qui ne sont pas si bien partagés de ce côté-là.

5. Sur les paratonnères aux magazins à poudre à Okhta.

Mr. l'Adjoint *Pétroff*, présenta et lut un rapport cir-

constancié sur l'état, dans lequel il a trouvé les paratonnères aux magazins à poudre à Okhta, et sur les changemens et précautions qu'il a proposées, pour plus de sûreté, au Directeur des fabriques.

6. Sur un mémoire de Mr. le Docteur Kanzler à Munic.

Mr. l'Académicien *Krafft*, chargé d'examiner un mémoire, transmis à l'Académie par Mr. le Docteur *Kanzler*, sous le tître: *De l'influence des paratonnères sur l'atmosphère*, rapporta: que les observations rassemblées par l'Auteur méritent autant d'attention que de confiance, et qu'elles semblent venir fortement à l'appui des assertions de l'auteur: 1°) que la multiplication des paratonnères garantit effectivement les campagnes contre les effets dévastateurs de la grèle; 2°) qu'il n'en résulte aucune diminution de l'électrogène, ni aucun autre effet nuisible sur la santé des hommes ou des bestiaux, ni sur la végétation et sur la fertilité des campagnes; assertions qui, avec leurs preuves, font le sujet d'un mémoire antérieur de Mr. *Kanzler*, transmis à l'Académie l'année passée. Mr. *Krafft* est d'avis que Mr. *Kanzler* doit être invité à continuer ses recherches et ses observations intéressantes.

7. Sur un ouvrage de Mr. Achard.

Mr. l'Académicien *Zakharoff*, chargé d'examiner un

ouvrage de Mr. *Achard*; *Die Europäische Zuckerfabrikation aus Runkelrüben, in Verbindung mit der Bereitung des Branntweins, des Rums, des Essigs und eines Coffé-Surrogats aus ihren Abfällen*, en donna son opinion contenant en substance: 1°) que toute la fabrication, décrite avec le plus grand détail dans cet ouvrage, est fondée sur les principes de la saine Chimie; 2°) que la possibilité de faire du sucre de la bèterave est non seulement prouvée par les expériences du Docteur *Neubeck*, instituées par ordre de S. M. le Roi de Prusse, mais aussi par les essais nombreux faits depuis Mr. *Achard* par plusieurs autres Chimistes; 3°) qu'il résulte des expériences de Mr. *Achard*, qu'en vendant au prix de 26 écus les quintal de sucre en farine, ou bien à un demi écu la livre du sucre raffiné, on obtient un profit net de 7000 écus, sur une avance de 5300 écus.

8. Sur un ouvrage manuscrit de Mr. de Gaverdovski.

Mrs. les Académiciens *Severguine* et *Sevastianoff*, chargés d'examiner un ouvrage manuscrit de Mr. le Major de *Gaverdovski*: Обозренiе Киргизъ-Кайсакской степи, Часть II., ils en firent leur rapport, contenant en substance: que cet ouvrage renferme beaucoup d'observations utiles et intéressantes, mais que le

stile a besoin d'être corrigé, parcequ'outre un grand nombre de passages obscurs, provenans du peu d'habitude de l'auteur à expliquer nettement ses pensées, on y trouve tout autant de fautes contre les regles de la langue Russe.

9. Sur un ouvrage de Mr. Friebe et Drümpelmann.

S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner un ouvrage de Mrs. *Friebe* et *Drümpelmann: Zoographie de Livonie, de Courlande et d'Esthonie* etc. en fit son rapport contenant en substance: que ce premier cahier ne renferme pas un seul animal qui ne se trouvât dans toute l'Europe, et même dans l'Asie; que les déscriptions ne contiennent donc rien de neuf, et que les dessins sont superflus, parcequ'on peut voir la déscription et la représentation de ces mêmes animaux dans une infinité d'ouvrages d'histoire naturelle; que les Auteurs auroient dû se borner à la déscription et gravure des espèces et variétés qui sont propres exclusivement aux trois provinces mentionnées, qu'alors leur entreprise auroit été plus méritoire et le prix de leur ouvrage plus modique.

10. Sur l'évaporation de l'eau pure et de l'eau salée.

Mr. l'Académicien *Zakharoff* fit savoir à la Conférence, par un rapport signé de lui, de Mr. l'Académicien

extraordinaire *Schérer* et Mr. l'Adjoint *Pétroff*: que les expériences instituées en leur présence sur l'évaporation de l'eau pure et de l'eau salée, sont finies, et ont prononcé d'une manière décisive contre le projet présenté par Mr. le Conseiller de Collèges *Safonoff*, de rendre l'eau salée plus forte par l'évaporation sur le plan incliné, tout comme ils avoient prédit dans leurs opinions concernant cette méthode. Quant au détail des résultats de ces expériences, Mrs. les Rapporteurs communiquèrent à la Conférence les copies des protocoles tenus à cette occasion par le Comité nommé pour examiner la projet mentionné.

11. Sur le Baromètre de Mr. Pansner.

Mr. l'Académicien *Zakharoff*, chargé d'examiner une brochure intitulée: *Das Reise-Barometer; von L. Pansner*, fit l'éloge des moyens que l'auteur y propose pour affermir les tuyaux et les garantir contre les effets des secousses et autres accidens; mais il croit qu'un simple tuyau en syphon pourroit être affermi avec le même succès et d'une manière plus simple.

12. Sur quelques mémoires manuscrits.

S. E. Mgr. le Ministre de l'Instruction ayant transmis à l'Académie cinq mémoires manuscrits, pour y être examinés, savoir:

1°) *Langue primitive, dite Pehlvi, analysée et comparée avec les langues modernes etc.*

2°) *Langue primitive, considérée dans les origines mythologiques.*

3°) *Un Cahier contenant les noms de la Géographie ancienne, expliqués par la langue primitive.*

4°) *Recueil des anciens termes Esclavons.*

5°) *Essai du Dictionnaire étymologique de la langue françoise,*

Mr. l'Académicien extraordinaire *Klaproth*, chargé de cet examen, en fit son rapport, dont la substance est: que ces mémoires fournissent un nouvel exemple ajouté à ceux de Rudbeck et de ses semblables, à quelles erreurs peut entrainer le penchant d'étymologiser lorsqu'on s'y abandonne; que d'ailleurs l'auteur confond fréquemment des mots Persans avec des mots Turcs; qu'il ignore la théorie des formes de la langue arabe; et qu'en suivant sa méthode on peut déduire tel mot qu'on voudra d'une langue quelconque.

13. Sur un ouvrage manuscrit.

Mr. l'Adjoint *Pétroff* ayant été chargé par la Conférence d'examiner un manuscrit présenté à SA MAJEST

L'EMPÉREUR sous le tître : О содержаніи металловъ подверженныхъ дѣйствію въ обезгорюченномъ воздухѣ; переведено съ иностраннаго языка; il en fit son rapport contenant en substance : 1°) que l'original de cette traduction, quel qu'il soit, est un mauvais livre qui ne valoit pas la peine d'être traduit; 2°) que la traduction est digne de l'original, c'est-à-dire, qu'elle est toute aussi mauvaise; et 3°) que la main qui a transcrit au net le brouillon du traducteur a couronné l'ouvrage, en copiant aussi vicieusement que possible.

14. Sur un ouvrage de S. E. Mr. le Baron de Campenhausen.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Krug*, chargé, à la suite d'un ordre de S. E. Mgr. le Ministre de l'Instruction, d'examiner l'ouvrage: *Genealogisch-chronologische Geschichte des allerdurchlauchtigsten Hauses Romanoff, und seines voraltерlichen Stammhauses; entworfen von B. Freyherrn von Campenhausen. Leipzig* 1805, 4to, en fit son rapport dont la substance est : que l'auteur a recueilli dans cet ouvrage avec beaucoup de soin toutes les notices qu'on trouve éparses çà et là sur l'origine et l'histoire primitive de la maison Impériale regnante; qu'il a su apprécier d'une manière aussi exacte que judicieuse les opinions douteuses de quelques au-

teurs modernes sur l'origine de cette maison; qu'il a rapproché avec sagacité tout ce qui peut répandre du jour sur la généalogie de la maison regnante et des familles de même origine; mais qu'avant de pouvoir porter un jugement définitif sur l'ensemble de ce travail méritoire, il faudra en attendre le 2^{d} Volume, qui contiendra l'histoire généalogique spécielle de la postérité de *Roman Yourievitsch Sacharin*, et où l'auteur a promis d'appuyer toutes ses assertions des pièces justificatives.

15. Sur une eau de vie de froment suspectée.

Mr. l'Académicien *Zackharoff* rapporta par écrit: que Mr. le Conseiler d'Etat actuel *Crichton*, Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* et lui, ont été appellés au premier Département du haut et dirigeant Sénat, pour y examiner, conformément à un ordre suprême, de l'eau de vie de froment, et voir si elle ne contient pas quelque mélange nuisible, surtout du verd calciné; mais qu'après avoir institué diverses épreuves, ils n'y ont trouvé aucune trace d'un ingrédient dangereux.

16. Sur les parties souterraines des paratonnères établis aux magazins à poudre.

Mr. l'Adjoint *Pétroff*, ayant été chargé de se rendre à Okhta, pour y examiner les parties souterraines des paraton-

nères établis aux magazins à poudre, il en fit son rapport et indiqua les réparations et changemens qu'il a jugé nécessaires. Ses propositions furent communiquées à l'Expédition d'Artillerie du Collège IMPÉRIAL de Guerre.

17. Sur le Journal de voyage de feu Mr. l'Adjoint Rédovski.

S. E. Mr. l'Académicien *Ozeretskovski*, chargé d'examiner le journal du voyage de feu Mr. l'Adjoint *Rédofski*, intitulé: *Johann Redofski's Tagebuch einer in den Jahren* 1805 *und* 1806 *von Kiachta nach Urga und von Jakutzk nach Ishiginsk unternommenen Reise*: rapporta que ce Journal renferme beaucoup de choses intéressantes, qui mériteroient d'en être extraites et publiées séparément, c'est de quoi la Conférence pourroit charger un des jeunes Naturalistes de l'Académie. La Conférence approuva la proposition, mais elle en remit l'exécution jusqu'à ce que l'Académie aura reçu les autres papiers du Défunt, qu'elle espère d'obtenir.

18. Sur un Surrogat du Quinquina proposé par Mr. Rehmann.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer*, chargé d'examiner ce Surrogat, en fit son rapport, dont le contenu est: que cette substance végétale, comparée avec le véri-

table Quinquina, en diffère très-essentiellement; que des deux parties constituantes, caractéristiques, principalement efficaces dans les maladies et contenues dans le Quinquina, à peine se trouve-t'-il une trace dans le Surrogat de Mr. le Docteur *Rehmann;* qu'en revanche une recherche comparative de ce dernier avec l'écorce de la pomme de Grenade a fait voir la plus parfaite analogie entre la poudre de Mr. *Rehmann* et la poudre de la dite écorce.

19. Sur les fragmens d'une chaine d'or trouvés près d'Olviopol.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Krug*, chargé d'examiner cette antiquité nationale envoyée au Musée, et d'en dire son opinion, fit voir: que ce sont des fragmens d'une de ces chaines d'or, à trois bulles garnies de pierres précieuses, que les Empéreurs Grecs, et aussi les Souverains de Russie, avoient coûtume de distribuer, comme des marques de dignité, aux Gouverneurs de leurs provinces et aux grands Dignitaires de leur Cour, ce dont il cite plusieurs exemples. La valeur métallique de ces fragmens est de 200 roubles en assignations; mais Mr. *Krug* fut d'avis, qu'une récompense de 500 roubles, accordée à celui qui les a trouvés, ne seroit pas trop forte, attendu qu'elle

encourageroit à des fouilles et empêcheroit que de pareilles curiosités ne rentrassent au creuset, comme cela arrive tant de fois.

20. Examen d'un Journal des voyages du Géodésiste Kojevine.

Mrs. les Académiciens *Ozeretskovski* et *Sevastianoff*, chargés d'examiner un Journal de voyage, envoyé à l'Académie par le *Géodésiste Kojevine*, en firent leur rapport, dont la substance est: que ce Journal contient quelques bonnes observations et des notices très intéressantes qui mériteroient d'en être extraites; mais que Mr. *Kojevine* sait si peu énoncer ses idées, et qu'il est si obscur dans beaucoup d'endroits, que son ouvrage, tel qu'il est, ne sauroit jamais être publié ni en entier, ni en partie.

21. Examen d'un mémoire de Mr. le Docteur Trinius.

Mr. l'Académicien *Severguine*, chargé d'examiner un mémoire ayant pour titre: *Der Bau der Erde, eine Untersuchung von Doctor Trinius;* en fit son rapport contenant en substance: 1°) que l'auteur de cet ouvrage possède des connoissances minéralogiques très solides; 2°) qu'il est bien versé dans la Chimie, l'inséparable compagne de la

Minéralogie; 3°) que son ouvrage, qui n'a rien de moins pour objet que d'établir une nouvelle théorie de la formation de la croute de la terre, opposée aux opinions connues jusqu'ici, porte l'empreinte d'un esprit pénétrant et solide.

22. Examen du modèle d'une machine hydraulique.

Mrs. les Académiciens *Fufs*, *Gourieff* et *Viscoratoff*, chargés d'examiner le modèle d'une machine hydraulique de l'invention de Mr. le Conseiller de Cour *Kovalski*, en firent leur rapport, contenant en substance: 1°) que la machine, dont il s'agit, est une application ingénieuse d'un principe, qui fait aussi la base du bélier hydraulique; que les coups successifs y sont rendus plus fréquens, plus fermes, plus réguliers, mieux dirigés, et par conséquent plus efficaces, par un mécanisme mis en mouvement au moyen d'une manivelle et rendu uniforme au moyen d'une roue de volée et de ressorts; 2°) que le modèle de cette machine est construit par Mr. *Kovalski*, avec beaucoup de soin et d'élégance, et mérite déjà par ces qualités d'orner un cabinet de modèles; 3°) que toute sa composition, même jusqu'aux parties accessoires et moins essentielles, telles que l'index qui marque le nombre des chocs effectués dans un tems donné, fait connoître, dans la per-

sonne de l'inventeur, un génie mécanique national digne d'être encouragé; 4°) que tous les mouvemens du modèle sont très legers et aisés, et que son effet, d'après les expériences instituées en présence des Rapporteurs, est extraordinaire et surprenant dans une si petite machine, laquelle, par un tuyau de 5$\frac{1}{2}$ lignes de diamètre, verse jusqu'à dix pieds cubiques d'eau par heure; 5°) que cependant il ne faut pas compter sur un effet aussi considérable, que ce modèle paroit le promettre, lorsque la machine seroit exécutée en grand, non seulement parcequ'il sera impossible d'y produire jusqu'à six chocs par seconde, comme le modèle les donne, mais aussi parceque les résistances augmenteront dans une proportion très-nuisible à son effet, lorsque la machine sera faite d'après une plus grande échelle, et que les ressorts, qui jouent un si grand role dans le modèle, pourroient bien rencontrer, dans l'execution en grand, plus de difficultés qu'on ne pense; 6°) que cela non obstant, établie dans un lieu fixe, où il s'agiroit de puiser beaucoup d'eau sans interruption, une machine construite d'après ces principes pourra être utile, surtout si l'inventeur, en l'exécutant en grand, tâchera de lui donner la simplicité et le perfectionnement dont il avoue lui-même qu'elle est encore susceptible.

23. Examen du Lichen esculentus et du Lichen coralloides.

Mr. l'Adjoint *Kirchhoff* présenta son rapport sur deux espèces de mousses (Lichen esculentus et Lichen corolloides), qu'il avoit été chargé d'examiner. Il a trouvé que dans cent parties la premièıe espèce contient treize et la seconde quatoize parties d'une substance gommeuse transparente, d'un jaune tirant sur le brun, et parfaitement analogue à la gomme d'Arabie, et que les rapports que les solutions de ces substances et la solution de la véritable gomme d'Arabie ont avec d'autres corps, sont absolument les mêmes. Au reste Mr. *Kirchhoff* observe: 1°) qu'on auroit obtenu plus de substance gommeuse de ces mousses, si elles avoient été cueillies avant d'avoir atteint leur maturité; 2°) que d'autres végétaux, tel que l'ail et la bulbe du *Hyacinthus non scriptus*, se distinguent par une plus grande abondance de substance gommeuse.

24. Examen des principes, d'une nouvelle théorie du mouvement diurne de la terre.

Mr. l'Académicien *Fufs* lut une letrre de Mr. *Wood*, Professeur de Mathématiques de l'Académie de Richmond, Capitale de la Virginie, contenant *les principes d'une nou-*

velle théorie du mouvement diurne de la terre, fondée sur les propriétés de l'Epicycloïde, et il ajouta son opinion par écrit, contenant en substance : 1°) que sans s'arrêter à la critique du titre de l'ouvrage, qui promet une théorie nouvelle du mouvement diurne de la terre, tandis qu'il donne celle du mouvement d'un point de sa surface dans l'espace absolu, on peut passer à l'auteur, comme des spéculations géométriques, si non neuves et utiles, au moins vrayes et légitimes, ses recherches sur les vitesses, avec lesquelles sont parcourus des arcs de Cycloïde et d'Epicycloïde allongée; 2°) qu'on peut lui passer encore la supposition, qu'en 24 heures la terre décrive la corde de l'ellipse, au lieu de l'arc, et que le mouvement progressif de son centre dans l'écliptique soit uniforme et le même pour tous les jours de l'année, quoique à prendre la chose à la rigueur, et surtout dans des recherches aussi délicates que celles-là, on pourroit justement reprouver ces deux suppositions comme très-peu exactes; 3°) mais qu'une chose qu'on ne sauroit lui passer du tout, c'est de confondre les effets des attractions du soleil et de la terre, et de faire dépendre du mouvement progressif la force centrifuge uniquement produite par la rotation de la terre; 4°) que le résultat que sa théorie lui a donné pour la marée auroit seul dû suffire pour con-

vaincre Mr. *Wood* de la fausseté de cette théorie; attendu que la théorie du flux et reflux, fondée sur l'action du soleil et de la lune, est si bien d'accord avec les loix de la gravitation et avec les phénomènes, qu'un effet qui surpasse ces attractions respectivement 306 et 1372 fois ne peut manquer de rendre suspect un raisonnement qui mène à de pareils résultats.

25. Examen d'un ouvrage de Mr. Bauer, concernant la résolution des équations algébriques numériques.

S. E. Mgr. le Ministre envoya à la Conférence un ouvrage de Mr. *Bauer: Ueber die allgemeine Entwicklung aller möglichen Wurzeln der numerischen algebraischen Gleichungen jedes Grades, nach einer neuen Formel; von H. Bauer, Conrector am Lyceum zu Potsdam etc.* et fit savoir que SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR a daigné ordonner très-gracieusement, que cet ouvrage soit examiné par un Comité composé des Académiciens *Fufs, Schubert* et *Gourieff*.

Les membres du Comité, nommé par SA MAJESTÉ pour examiner cet ouvrage, en firent leur rapport contenant en substance: 1°) que la méthode, proposée par Mr. *Bauer* pour la résolution des équations numériques, appartient à François *Viète*, Mathématicien du XVIe. siècle; 2°)

que cette méthode est plus longue et plus pénible que les méthodes connues et usitées, c'est de quoi les Examinateurs se sont assûrés par des calculs comparatifs, institués sur des équations du 3me, 4me, 5me et 6me, degré; 3°) que le mémoire de Mr. *Bauer* est confus, obscur et rempli d'assertions erronnées. Une copie de cette opinion, signée des trois Académiciens-Examinateurs, a été transmise à Son Excellence Mgr. le Ministre, pour être mise sous les yeux de SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR.

26. Examen d'un prétendu mouvement perpétuel.

S. E. Mgr. le Ministre transmit à l'Académie le dessin et la déscription d'un prétendu mouvement perpétuel, envoyé d'Aberfors, par un Anonyme; et SA MAJESTÉ L'EMPÉREUR ayant démandé l'opinion de l'Académie sur cette invention, Mr. l'Académicien *Fuſs* l'examina et en fit son rapport contenant en substance: 1°) que l'idée de ce mouvement perpétuel n'est pas nouvelle; 2°) qu'elle ne sauroit être exécutée, même en petit, parceque le moindre écart du dégré de perfection que la machine exige, détruira nécessairement tout l'effet de la très petite force motrice; 3°) que supposé qu'elle pût être exécutée dans toute la perfection possible, un calcul de l'effet de la machine, fondé sur la théorie, fait voir que les oscilla-

tions du balancier ne sauroient durer que peu de tems; 4°) que supposé qu'elles pussent effectivement se perpétuer, ce ne seroit toujours qu'un joujou curieux, mais non une invention utile, tant qu'on ne pourra pas l'exécuter assez en grand, pour substituer sa force motrice à l'eau, à l'air, aux vapeurs et autres agens capables de surmonter de grandes résistances dans les machines composées, ce qui est absolument impossible.

27. Examen d'un mémoire sur la théorie des écluses.

Mr. l'Académicien *Krafft* chargé d'examiner un mémoire de concours, pour la question, concernant la théorie des écluses: *Essai pour servir à la théorie des écluses*, il en fit son rapport, contenant en substance: que ce mémoire quoique de la main d'un maître dans l'Analyse, renferme des conclusions pratiques trop générales et trop peu applicables à la construction même des écluses, et qu'il ne satisfait par conséquent point à la question proposée par l'Académie. Ainsi, indépendamment de ce qu'il est venu trois mois après le terme, ce mémoire ne sauroit aspirer au prix, de l'aveu de l'Auteur de la question lui-même.

23. Examen d'un ouvrage minéralogique de Mr. d'Engelhardt.

Mr. l'Académicien *Severguine*, chargé d'examiner un ouvrage de Mr. *Maurice d'Engelhardt*, intitulé : *Fragmente aus der Mineralogie*, en fit son rapport, contenant en substance : 1°) que les réflexions de Mr. *d'Engelhardt* sur les quatre principaux objets, qu'il traite dans son mémoire, sont si justes et si fondées, que l'ouvrage mérite l'approbation la plus entière; 2°) que son opinion sur les vallées est conforme à la théorie de la formation des montagnes et des changemens qu'elles ont subi ; 3°) que les conséquences et conclusions que l'auteur tire de la pésanteur spécifique et de la couleur des fossiles terreux, sont exposées d'une manière si convainquante qu'elles ne peuvent plus être sujettes à aucun doute; 4°) que beaucoup de ses réflexions sont le résultat de ses propres observations. Il ajouta, quant au voyage oryctognostique que Mr. d'*Engelhardt* se propose de faire par la Moldavie et la Valachie: qu'il seroit bien à désirer que ces provinces, presque inconnues encore sous ce rapport, fussent visitées par un observateur aussi instruit.

VII.

OUVRAGES PUBLIÉS PAR L'ACADÉMIE, ET PAR DES ACADÉMICIENS, EN 1809 ET 1810.

1°) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg. Tome 1; avec l'Histoire de l'Académie pour les années 1803 — 1806. St. Pétersbourg 1809.

2°) Географическое и статистическое Описаніе Грузіи и Кавказа, изъ путешествія Г-на Академика И. А. Гильденштедта въ 1770, 71, 72 и 73 годахъ. С. П. Б. 1809.

3°) Технологическій журналъ, тома VI, часть I. II. III. IV. съ фигурами. С. П. Б. 1809.

4°) Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg, Tome 2; avec l'Histoire de l'Académie pour les années 1807 et 1808. St. Pétersbourg 1810.

5°) Умозрительныя Изслѣдованія Императорской С. Петербургской Академіи Наукъ. Томъ 2. С. П. Б. 1810.

6°) Ueber die Sprache und den Ursprung der Aghuan oder Afghanen; von Julius v. Klaproth. St. Petersburg 1810.

7°) Геогнозія, или наука о горахъ и горныхъ породахъ, съ присовокупленіемъ наставленій путешествующему Геологу, почерпнутыхъ изъ IV Тома путешествія по Алпійскимъ горамъ Г-на Соссюра, издана Александромъ Севастьяновымъ. С. П. Б. 1810.

8°) Словарь химическій, содержащій въ себѣ ѳеорію и практику химіи, съ приложеніемъ ея къ естественной исторіи и искусствамъ, сочиненія Шарлъ Луи Кадета, обработанный на Россійскомъ языкѣ трудами Василья Севергина, Часть I, отъ А до К. съ фигурами. С. П. Б. 1810.

9°) Populäre Astronomie, zweiter Theil, die Theorische; dritter Theil, die Physische Astronomie; von Friedrich Theodor Schubert. St. Petersburg 1810.

10°) Archiv für asiatische Litteratur, Geschichte und Sprachkun-

de; verfasst von Julius v. Klaproth. Erster Band. St. Petersburg 1810.

11°) Технологическій журналъ, издаваемый Императорскою Академіею Наукъ. Томъ VII. С. П. Б. 1810.

12°) Начальныя Основанія чистой Маѳематики, сочиненныя Николаемъ Фуссомъ. Часть I. С. П. Б. 1810.

VIII.

PRIX PROPOSÉS PAR L'ACADÉMIE.

(Programme.)

Parmi les questions proposées par l'Académie dans son dernier programme, celle pour le prix de l'an 1810 étoit conçue en ces termes:

> Perfectionner la théorie des écluses et en déduire des règles, pour construire ces ouvrages importans de la manière la plus avantageuse, afin qu'autant que possible leur service soit 1) sûr, 2) prompt, et 3) économique en fraix de construction et d'entretien, mais surtout en dépense d'eau requise pour le passage des bâtimens de transport.

L'Académie a reçu sur cette question un seul mémoire de concours, ayant pour titre: *Essai pour servir à la théorie des écluses*, et pour devise le passage de Pindare: *Πράσσει γὰρ ἔργῳ μὲν σθένος, βουλαῖσι δὲ φρήν.* Les Commissaires chargés de l'examen de cette réponse, arrivée trop tard, ont trouvé que le mémoire est de la main d'un Savant très versé dans l'Analyse; mais que les conclusions pratiques qu'il tire de ses formules sont trop générales et trop peu applicables à la construction des écluses. Il leur a semblé de plus, que l'auteur n'a pas été à même de consulter les ouvrages fondamentaux, publiés depuis peu sur les écluses, par des Praticiens savans et expérimentés dans ce genre de constructions.

L'Académie ayant vu par ce rapport que le mémoire mentionné, d'ailleurs estimable, ne satisfait pas à toutes les conditions de la question proposée, s'est vu à regrèt dans l'impossibilité de lui décerner le prix, d'autant moins qu'il est arrivé trois mois après le terme de rigueur, fixé par le programme.

En publiant ce jugement, l'Académie réitère sa question historique pour 1811, dont le sujet est :

Une Chronologie complettement comparée, et autant que possible corrigée et vérifiée, des Auteurs Byzantins, depuis la fondation de la ville de Constantinople jusqu'à sa conquête par les Turcs.

En même tems l'Académie propose la question astronomique suivante pour l'an 1814 :

La véritable grosseur du corps central de notre système étant un des élémens les plus importans, tant pour la théorie de l'Astronomie que pour la pratique, il serait à désirer que le diamètre du soleil fût determiné avec la plus grande précision ; mais, malgré les soins des Astronomes modernes, et malgré la perfection à laquelle les instrumens sont portés aujourd'hui, il y a encore des différences entre les résultats trouvés par les plus habiles observateurs, lesquelles, quoique peu considérables en elles-mêmes, influent d'une manière désagréable sur quelques objets très-importans de l'Astronomie. Le vrai diamètre du soleil est la mesure des grosseurs de tous les corps célestes qui composent notre système, comme le rayon de l'orbite de la terre est la base de toutes les distances : la connoissance de la quantité précise de cet élément serait donc d'une grande importance pour l'Astronomie physique. Mais, elle ne serait pas moins importante pour la pratique de cette science, puisque c'est le diamètre du soleil que les Astronomes employent ordinairement pour évaluer les parties des micromètres. On sait d'ailleurs, que *l'irradiation*, ou la lumière parasite qui environne les corps radians, les fait paroître trop grands, et que l'augmentation du diamètre du soleil, qui en résulte, est plus considérable, à mesure que la lunette est moins grande ou moins parfaite, mais qu'elle ne saurait jamais devenir nulle, même dans les plus grandes lunettes. Comme il paraît que, dans les éclipses solaires, malgré l'irradiation du soleil, le contact apparent des limbes des deux astres ne peut avoir lieu qu'à l'instant où le disque du soleil est réellement entamé par la lune, le calul des observations d'éclipses solaires est peut-être le seul moyen pour trouver le vrai diamètre du soleil ;

et l'on sait que Mr. du Séjour a trouvé par le calcul, que le demi-diamètre du soleil, tel qu'il se trouve par les mesures les plus exactes, doit être diminué de 3½ secondes, pour satisfaire aux observations des éclipses. Ce calcul a encore donné le résultat, que le demi-diamètre de la lune doit être diminué de la même quantité, pour satisfaire aux phénomènes des éclipses, ce qui est l'effet de *l'inflexion* des rayons solaires dans l'atmosphère de la lune. Si l'on pouvait se reposer entièrement sur ces résultats, on aurait le vrai diamètre du soleil, en ôtant 7 de la quantité qu'on trouve par les meilleures lunettes; on connaitrait en même tems la réfraction horisontale qu'on éprouve dans la lune, et qui serait égale à la moitié de 3½″. Mais ces résultats n'ayant été trouvés que par le calcul de deux eclipses (de 1764 et 1769), auxquelles on pourrait ajouter celles de 1706 et de 1748, calculées par Mr. Méchain: on ne saurait les regarder comme tout-à-fait sûrs; desorte que le nombre des quantités inconnues, qui entrent dans le calcul des éclipses, est encore augmenté par la correction qu'il faut appliquer aux diamètres du soleil et de la lune, ce qui rend la solution des équations conditionnelles très-compliquée et souvent précaire. Il y a même des tables astronomiques, dans lesquelles on a introduit ces corrections, ce qui occasionne des confusions et des embarras pour celui qui veut calculer des éclipses.

Cette matière paraissant donc exiger une nouvelle discussion, l'Académie l'a choisie pour le sujet de son prix de 1814, en proposant aux recherches des Astronomes les objets suivans:

1) Déterminer par un grand nombre d'observations, déjà faites ou encore à faire, tant par le moyen du tems, que des micromètres dont la valeur a été vérifiée par la mesure d'une base, la quantité précise des diamètres du soleil et de la lune, telle qu'elle se présente dans les meilleures lunettes; la différence qui s'y trouve par rapport à la différente quantité des instrumens; enfin celle qui, d'après les observations de nos jours, paraît avoir lieu entre le diamètre vertical et horisontal du soleil, ou plutôt, entre son diamètre polaire et équatorial;

2) Développer la théorie de *l'irradiation* et de *l'inflexion*, entant qu'elle influe sur la diminution des diamètres de ces deux astres dans les éclipses.

3) Trouver par le calcul d'un nombre suffisant d'éclipses solaires, surtout au moyen des observations des distances des cornes, la quantité précise de ces deux corrections; et par le calcul d'occultations d'étoiles, la quantité de *l'inflexion* séparément.

4) Tirer de toutes ces recherches, un résultat sûr qui donne la quantité précise :

a) du diamètre du soleil, affecté de l'irradiation, ou tel qu'on le voit par des télescopes plus ou moins grands, qui puisse servir de base pour évaluer les parties des micromètres.

b) du vrai diamètre du soleil, dépouillé de l'effet de l'irradiation, pour servir de base dans l'Astronomie physique.

c) des diamètres du soleil et de la lune, qui satisfont aux phénomènes des éclipses, ou bien des corrections connues, sous le nom de *l'irradiation* et de *l'inflexion*, qu'il faut appliquer aux diamètres, tirés des meilleures tables astronomiques, ou déterminés immédiatement par l'observation, avant que de les employer dans le calcul des éclipses.

Le prix est de cent Ducats d'Hollande, pour chaque question et le terme de rigueur, après l'expiration duquel aucun mémoire ne sera plus admis au concours, est : pour la question historique le 1 Juillet 1811, et pour la question astronomique (qui, pour être bien discutée, demande un terme plus éloigné) : le 1 Janvier 1814.

L'Académie invite les Savans de toutes les nations, sans en exclure ses membres honoraires et correspondans, à travailler sur cette matière. Il n'y a que les Académiciens mêmes, appellés à faire la fonction de juges, qu'elle croit devoir exclure du concours.

Les Savans qui voudront concourir pour ces prix, ne mettront point leurs noms à leurs ouvrages, mais seulement une sentence ou devise, et ils ajouteront à leurs mémoires un billet cacheté qui portera au dehors la même devise et au dedans le nom, la qualité et la demeure de l'au-

teur. On n'ouvrira que le billet de la pièce qui aura remporté le prix; les autres seront brûlés, sans avoir été décachetés.

Les mémoires doivent être écrits d'un caractère lisible, soit en Russe, en François, en Allemand, ou en Latin, et ils seront adressés au Secrétaire perpétuel de l'Académie, qui délivrera à la personne qui lui aura été indiquée par l'auteur, un récipissé marqué de la dévise et du numéro dont il aura côté la piécé.

Le mémoire couronné est une propriété de l'Académie, et l'auteur ne saurait le faire imprimer sans sa permission formelle. Les autres pièces de concours peuvent être redemandées au Secrétaire, qui les délivrera, ici à St. Pétersbourg, aux personnes qui se présenteront chez lui avec une procuration de l'auteur.

IX.

VOYAGES SCIENTIFIQUES FAITS PAR ORDRE DE L'ACADÉMIE.

1.

Mr. l'Académicien *Severguine* et Mr. l'Académicien extraordinaire *Smélovski*, firent en 1809, à la suite d'un ordre SUPRÊME, un voyage dans le Gouvernement de Twer, pour y examiner chymiquement, et à leur source, des eaux minérales découvertes dans ce Gouvernement. Nous avons vu ci-dessus, en parlant des mémoires présentés: que le voyage de Mr. l'Académicien *Severguine* à aussi été fructueux pour la Minéralogie.

2.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Schérer* fit en 1809, pareillement à la suite d'un ordre SUPRÊME, un vo-

yage en Finlande, pour y examiner, à la source même, et analyser chymiquement, des eaux minérales découvertes dans ce Gouvernement.

3.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski* continua en 1809 son voyage astronomique, entrepris dans la vue de déterminer la position géographique des principaux points de la Russie Européenne. Après avoir calculé à Astrakhan, pendant l'hiver, ses observations des années précédentes et envoyées à l'Académie la longitude et latitude de soixante villes, il observa, dans le courant de 1809, à Tsaritsin, Saratoff, Volsk, Khwalynsk, Sysran, Simbirsk, Kazan, Buinsk, Khorsoun, Ardatoff, Tsiwilsk, Kousmodemiansk, Makarieff, Nishney-Novgorod, Wiazniki, Vladimir, Pokroff, Pereslavl, Jaroslavl, Kostroma, Yourieff-Povolsk et Mourom.

4.

Considérant que le Caucase, surtout la partie nouvellement conquise, eû égard à l'état actuel de perfection de la Minéralogie, est encore, pour ainsi dire, parfaitement inconnu; et pourtant si digne, sous ce rapport, de la plus grande attention des Physiciens, l'Académie y envoya Mr. l'Adjoint *Schlegelmilch*, qui avoit déjà fait autrefois un séjour de six mois, dans ces montagnes,

mais dans un tems peu favorable aux recherches scientifiques. L'Académie a cru qu'aprésent, que presque tout le Caucase est soumis à la domination Russe, c'est l'époque la plus favorable, pour examiner, sous ce rapport, toute cette chaine remarquable qui, en d'autres tems, pourra redevenir inaccessible au voyageur Naturaliste, si non en entier, au moins en partie. Selon les instructions minéralogiques, zoologiques et botaniques, données à cet Adjoint, il doit commencer le voyage par la Crimée, dont les montagnes sont des branches de la chaine Caucasienne; aller de là par la Mingrélie et l'Imérétie en Géorgie, de là sur l'Ararat, et finir sa course par la côte occidentale de la mer Caspienne. Après un tel voyage, qui durera deux ans, on pourra espérer de connoître mieux l'état physique de ces provinces, et leurs richesses dans les trois regnes de la nature.

5.

Mr. l'Académicien extraordinaire *Wisnievski* continua aussi en 1810 son voyage astronomique. Les points, où il a fait des observations, dans le courant de l'année, et dont par conséquent la position géographique sera determinée, lorsque les calculs en auront été faits, sont les suivans: Kharkoff, Bakhmout, Slavianoserbsk, Isayeva,

Sloboda, Novoï Tscherkask, Tsymlanskaya Stanitsa, Nishne-Tchirskaya, Katchalinskaya, Artchalinskaya, Pravotorovskaya, Novo-Khopersk, Tambof, Morshansk, Schatsk, Mourom, Malmysch, Okshansk, Perm, Koungour, Krasnooufimsk, Ekaterinbourg, Nevianski-Savod, Nishne-Tigil, Verkhotourie, Irbit, Kamyschlof, Siserskoi-Savod, Polevskoi.

MÉMOIRES

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

I. Section des sciences mathématiques.

II. Section des sciences physiques.

III. Section des sciences politiques.

TABLE DES MATIÈRES.

Histoire de l'Académie Impériale des Sciences.

Années 1809 et 1810.

I.
SECTION
DES
SCIENCES MATHÉMATIQUES.

INTEGRATIO
AEQUATIONIS DIFFERENTIALIS HUJUS
$$dy + yydx = \frac{A\,dx}{(a + 2bx + cxx)^2}.$$

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 23 Februarii 1779.

---

§. 1.

Ex forma hujus aequationis statim patet, si ea habeat integrale rationale, id necessario hanc speciem habere debere: $y = \frac{v}{a + 2bx + cxx}$, cujus formulae differentiale est

$$dy = \frac{dv\,(a + 2bx + cxx) - 2v\,dx\,(b + cx)}{(a + 2bx + cxx)^2}.$$

Hinc igitur, sublato denominatore, oritur haec aequatio:

$$dv\,(a + 2bx + cxx) - 2v\,dx\,(b + cx) + vv\,dx = A\,dx.$$

Quaeritur ergo, qualis quantitas pro v accipi debeat, ut isti aequationi satisfiat.

§. 2. Hic iterum facile intelligitur, istum valorem ipsius v aliam formam habere non posse praeter $v = f + 2gx + hx^2$, et cum hinc sit $dv = 2dx\,(g + hx)$, facta substitutione ac divisione per dx resultabit haec aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} hhx^4 + 4ghx^3 + 2bhxx + 2ahx + 2ag \\ \qquad\qquad\qquad - 2cgxx - 2cfx - 2bf \\ \qquad\qquad\qquad + 2fhxx + 4fgx + ff \\ \qquad\qquad\qquad + 4ggxx \end{array}\right\} = A$$

Ut jam ista aequatio evadat identica, necesse est, ut singulae potestates ipsius x seorsim se destruant; quare pro potestate quarta tollenda debet esse $h = 0$, hocque modo etiam tertia potestas abscedit, at pro secunda tollenda debet esse $4gg - 2cg = 0$, unde fit $g = \frac{1}{2}c$. Porro si ad nihilum redigantur termini ipsa quantitate x affecti, habebimus $4fg - 2cf = 0$, unde fit $g = \frac{1}{2}c$, quae conditio jam sponte est adimpleta, sicque tantum superest ut reddatur $ff + 2ag - 2bf = A$; quare cum sit $g = \frac{1}{2}c$, statui oportet $ff + ac - 2bf = A$, unde determinatur duplici modo quantitas f, erit enim $f = b \pm \sqrt{bb - ac + A}$.

§. 3. Quo nunc aequatio proposita commodior reddatur, loco $\sqrt{bb - ac + A}$ scribamus k, ut fiat $A = kk - bb + ac$, atque nostra aequatio integranda habebit hanc formam:

$$dy + yydx = \frac{(kk - bb + ac)\,dx}{(a + 2bx + cxx)^2}$$

et nunc huic aequationi satisfacere vidimus hunc valorem: $y = \frac{b \pm k + cx}{a + 2bx + cxx}$, ita ut jam duos valores simus adepti aequationi nostrae satisfacientes, propter signum ambiguum litterae k assignatum, qui autem non erunt reales nisi k

fuerit reale, hoc est nisi fuerit $bb - ac + A$ quantitas positiva. Hic autem probe tenendum est, in his formis neutiquam contineri integrale completum aequationis propositae, propterea quod nulla nova constans arbitraria est introducta, ita ut ista integratio tantum pro particulari sit habenda. Verum aequatio proposita ita est comparata, ut ex quolibet integrali particulari facili integrale completum erui possit, quod quomodo fieri debeat, in aequatione multo generaliori $dy + yydx = Vdx$ ostendisse juvabit, ubi V denotet functionem quamcunque ipsius x, cuique satisfacere inventus sit hic valor particularis $y = p$, ita ut haec aequatio $dp + ppdx = Vdx$ sit identica, atque nunc ex ipso hoc valore p elici debeat integrale completum.

§. 4. Hunc in finem statuamus integrale completum esse $y = p + z$, factaque substitutione orietur haec aequatio:

$$dp + dz + (pp + 2pz + zz)\, dx = V dx,$$

unde si illa aequatio subtrahatur, remanebit ista: $dz + 2pzdx + zzdx = 0$, quae posito $z = \frac{1}{v}$ transformatur in hanc: $dv - 2pvdx = dx$, quae per $e^{-2\int pdx}$ multiplicata evadit integrabilis, quippe cujus integrale erit $ve^{-2\int pdx} = \int e^{-2\int pdx} dx$, quod integrale constantem arbitrariam involvit, ita ut habeamus

$$v = e^{2\int pdx} \int e^{-2\int pdx} dx + Ce^{+2\int pdx},$$

quo valore invento erit nostrum integrale completum $y = p + \frac{1}{v}$.

§. 5. Applicemus hanc operationem ad aequationem nostram $dy + yydx = \frac{(kk - bb + ac)\,dx}{(a + 2bx + cxx)^2}$, pro qua invenimus integrale particulare $y = p = \frac{b \pm k + cx}{a + 2bx + cxx}$, ex quo fit $2pdx = \frac{2(b \pm k + cx)\,dx}{a + 2bx + cxx}$, cujus integratio nulla laborat difficultate. Ponamus igitur hoc integrale $\int 2pdx = lq$, ut fiat $e^{-2\int pdx} = e^{-lq} = \frac{1}{q}$ et $e^{2\int pdx} = q$, sicque integrale completum jam erit $y = p + \dfrac{1}{q\int\frac{dx}{q} + Cq}$.

§. 6. Quoniam vero geminum integrale particulare sumus adepti, propter signum ambiguum quantitatis k, inde integrale completum multo facilius eruitur, id quod etiam in aequatione generali $dy + yydx = Vdx$ ostendamus, cui bina integralia particularia satisfacere assumamus, scilicet primo $y = p$ et secundo $y = q$, ita ut sit

tam $dp + ppdx = Vdx$

quam $dq + qqdx = Vdx$

subtrahendo ergo utramque ab ipsa aequatione proposita hae duae aequationes orientur:

1°. $dy - dp + (yy - pp)\,dx = 0$ et

2°. $dy - dq + (yy - qq)\,dx = 0$

unde eliciuntur binae sequentes:

$\frac{dy - dp}{y - p} + (y + p)\,dx = 0$ et

$\frac{dy - dq}{y - q} + (y + q)\,dx = 0$

quarum haec ab illa subtracta relinquit

$$\frac{dy - dp}{y - p} - \frac{(dy - dq)}{y - q} = (p - q)\, dx = 0,$$

cujus integrale manifesto est $l\frac{y-p}{y-q} + \int (p - q)\, dx = C$; unde integrale completum jam facile colligitur.

§. 7. Cum enim pro nostra aequatione sit $dy + yy\,dx = \frac{(kk - bb + ac)dx}{(a + 2bx + cxx)^2}$, ubi ex superioribus patet esse $p = \frac{b + k + cx}{a + 2bx + cxx}$ et $q = \frac{b - k + cx}{a + 2bx + cxx}$, erit $p - q = \frac{2k}{a + 2bx + cxx}$; unde si ponamus $\int \frac{2k\,dx}{a + 2bx + cxx} = s$, habebimus $l\frac{y-p}{y-q} + s = C$. Hinc colligimus $\frac{y-p}{y-q} = \Delta e^{-s}$, ubi Δ denotat constantem arbitrariam, hincque porro concluditur $y = \frac{\Delta q e^{-s} - p}{\Delta e^{-s} - 1}$, sive $y = \frac{\Delta q - p e^s}{\Delta - e^s}$, quod est integrale completum nostrae aequationis.

Quo ista integratio clarior reddatur, eam aliquot exemplis illustremus.

Exemplum I.

Hujus aequationis $dy + yy\,dx = \frac{A\,dx}{(1 + xx)^2}$.

§. 8. Hic igitur ante omnia est $a = 1$, $b = 0$ et $c = 1$, hincque erit $A = kk + 1$, ideoque $k = \sqrt{(A - 1)}$; quam ob rem pro integralibus particularibus habebimus

$$s = 2\sqrt{(A - 1)} \int \frac{dx}{1 + xx} = 2\sqrt{(A - 1)}\ \text{A. tg. } x.$$

Porro vero est $p = \frac{x + \sqrt{A + 1}}{1 + xx}$ et $q = \frac{x - \sqrt{A - 1}}{1 + xx}$; unde colligitur integrale completum $y = \frac{\Delta(x - \sqrt{A - 1}) - e^s(x + \sqrt{A - 1})}{(1 + xx)(\Delta - e^s)}$.

§. 9. Quo haec propius ad usum accommodemus, ponamus integrale ita capi debere, ut evanescat posito $x = 0$;

hoc autem casu erit $s = 0$, unde constans Δ ita definiri debet, ut fiat $0 = \frac{-\Delta\sqrt{A-1}-\sqrt{A-1}}{\Delta - 1}$, unde fit $\Delta = -1$, sicque erit $y = \frac{x - \sqrt{A-1} + e^s(x + \sqrt{A-1})}{(1+xx)(1+e^s)}$, quae expressio semper erit realis, quoties $A - 1$ fuerit quantitas positiva.

§. 10. Cum autem hoc integrale semper debeat esse reale etiamsi $\sqrt{A-1}$ fuerit imaginarium, ostendendum est quomodo his casibus imaginaria se mutuo destruant. Quo autem hic calculus facilius expediri possit, ponamus esse $\sqrt{A-1} = \alpha\sqrt{-1}$, tum vero sit brevitatis gratia A. tg. $x = \Phi$, ut sit $x = \text{tg.}\,\Phi$ et $1 + xx = \frac{1}{\cos.\,\Phi^2}$, sicque nostra aequatio erit

$$y = \frac{(\text{tg.}\,\Phi - \alpha\sqrt{-1} + e^{2\alpha\Phi\sqrt{-1}}(\text{tg.}\,\Phi + \alpha\sqrt{-1}))\cos.\,\Phi^2}{1 + e^{2\alpha\Phi\sqrt{-1}}}.$$

§. 11. Quia hic ubique imaginaria occurrunt, atque adeo etiam in exponentibus, ea inde tolli oportet, quod fit ope formulae generalis $e^{\omega\sqrt{-1}} = \cos.\,\omega + \sqrt{-1}\sin.\,\omega$. Nostro casu erit $e^{2\alpha\Phi\sqrt{-1}} = \cos.\,2\alpha\Phi + \sqrt{-1}\sin.\,2\alpha\Phi$, ubi brevitatis gratia loco $2\alpha\Phi$ scribamus tantisper ω. Hoc valore substituto numerator fractionis inventae hanc induet formam:

$$\text{tg.}\,\Phi - \alpha\sqrt{-1} + (\text{tg.}\,\Phi + \alpha\sqrt{-1})(\cos.\,\omega + \sqrt{-1}\sin.\,\omega).$$

Sive hanc:

$$\text{tg.}\,\Phi(1 + \cos.\,\omega + \sqrt{-1}\sin.\,\omega) - \alpha\sqrt{-1}(1 - \cos.\,\omega - \sqrt{-1}\sin.\,\omega).$$

Hinc ergo si utrinque multiplicemus per $1 + \cos.\,\omega - \sqrt{-1}\sin.\,\omega$,

ut denominator fiat $= 2 + 2\cos.\omega = 2(1 + \cos.\omega)$, numerator, calculo subducto, evadet $2\,\mathrm{tg}.\Phi(1 + \cos.\omega) - 2\alpha\sin.\omega$, hocque modo tam numerator quam denominator est realis, quocirca integrale nostrum erit $y = \frac{\mathrm{tg}.\Phi(1 + \cos.\omega) - \alpha\sin.\omega)}{1 + \cos.\omega}\cos.\Phi^2$, in quo ergo integrali est tang. $\Phi = x$; $\alpha = -\sqrt{1 - A}$; $\omega = 2\alpha\Phi = -2\Phi\sqrt{1 - A}$.

§. 12. Quando igitur in aequatione nostra proposita $dy + yydx = \frac{A\,dx}{(1 + xx)^2}$ fuerit $A = 1 - \alpha\alpha$, tum posito $\alpha = \mathrm{tag}.\Phi$, sumptoque angulo $\omega = 2\alpha\Phi$, erit $y = \frac{x(1 + \cos.\omega) - \alpha\sin.\omega}{(1 + xx)(1 + \cos.\omega)}$, quae expressio adhuc simplicior reddi potest. Cum enim sit $\frac{\sin.\omega}{1 + \cos.\omega} = \mathrm{tg}.\frac{1}{2}\omega = \mathrm{tg}.\alpha\Phi$, erit $y = \frac{x - \alpha\,\mathrm{tg}.\alpha\Phi}{1 + xx}$, qui valor, posito $x = 0$, evanescit.

Exemplum II.

Hujus aequationis $dy + yydx = \frac{A\,dx}{(1 - xx)^2}$.

§. 13. Hic ergo est $a = 1$, $b = 0$ et $c = -1$; unde fit $A = kk - 1$, ideoque $k = \sqrt{A + 1}$, consequenter $s = 2\sqrt{(A + 1)}\int\frac{dx}{1 - xx} = \sqrt{A + 1} \times l\frac{1 + x}{1 - x}$. Hinc ergo erit $e^s = \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^k$, unde ob $p = \frac{k - x}{1 - xx}$ et $q = -\frac{k - x}{1 - xx}$, integrale nostrum fiet:

$$y = \frac{\Delta q - p\left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^k}{\Delta - \left(\frac{1 + x}{1 - x}\right)^k}$$

sive $y = \frac{\Delta(k + x)(1 - x)^k + (k - x)(1 + x)^k}{1 - xx((1 + x)^k - \Delta(1 - x)^k)}$.

Quo hanc expressionem ad formam commodiorem redigamus, statuamus $\int \frac{dx}{xx-1} = \omega$, ut fiat $s = 2k\omega$, atque pro integrali completo nacti sumus $y = \frac{\Delta q - pe^{2k\omega}}{\Delta - e^{2k\omega}}$, existente $p = \frac{k-x}{1-xx}$ et $q = \frac{-k-x}{1-xx}$, ita ut sit $y = \frac{\Delta(k+x)+(k-x)e^{2k\omega}}{(1-xx)(e^{2k\omega}-\Delta)}$. Hic jam loco Δ scribamus $\frac{m}{n}$ et supra et infra multiplicemus per $e^{-k\omega}$, eritque $y = \frac{me^{-k\omega}(k+x)+n(k-x)e^{k\omega}}{(1-xx)(ne^{k\omega}-me^{-k\omega})}$, quae forma facilius applicari poterit ad casus, quibus $k = \sqrt{A+1}$ fit quantitas imaginaria, quem casum hic jam omni cura evolvamus.

§. 14. Ponamus igitur formulam $\sqrt{A+1} = k$ esse imaginariam, ita ut sit $k = \alpha\sqrt{-1}$, ideoque $A = -\alpha\alpha - 1$, atque tum habebimus $e^{\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos.\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega$ et $e^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos.\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega$, quibus valoribus substitutis fiet:

$$y = \frac{\left\{\begin{array}{l} +m(\cos.\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)(x+\alpha\sqrt{-1}) \\ -n(\cos.\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)(x-\alpha\sqrt{-1}) \end{array}\right\}}{(1-xx)(n\cos.\alpha\omega + n\sqrt{-1}\sin.\alpha\omega - m\cos.\alpha\omega + m\sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)}.$$

§. 15. Hic jam constantes arbitrarias m et n ita assumi convenit, ut saltem denominator evadat realis, quod eveniet ponendo $m = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et $n = -\lambda + \mu\sqrt{-1}$, ita ut fiat $m+n = 2\mu\sqrt{-1}$ et $m-n = 2\lambda$. Hoc enim modo denominator evadet $-2(1-xx)(\lambda\cos.\alpha\omega + \mu\sin.\alpha\omega)$. Pro numeratore autem evolvendo notetur fore:

$$m(x+\alpha\sqrt{-1}) = \lambda x - \alpha\mu + (\lambda\alpha + \mu x)\sqrt{-1} \text{ et}$$

$$n(x-\alpha\sqrt{-1}) = -\lambda x + \alpha\mu + (\lambda\alpha + \mu x)\sqrt{-1}$$

atque ipse numerator erit:

$$2\cos.\alpha\omega(\lambda x-\mu\alpha)+2\sin.\alpha\omega(\lambda\alpha+\mu x)$$

hocque modo tota expressio reddita est realis, fit enim:

$$y=\frac{-\cos.\alpha\omega(\lambda x-\mu\alpha)-\sin.\alpha\omega(\lambda\alpha+\mu x)}{(1-xx)(\lambda\cos.\alpha\omega+\mu\sin.\alpha\omega)}$$

quod ergo est integrale completum hujus aequationis differentialis: $dy+yydx=\frac{-(\alpha\alpha+1)dx}{(1-xx)^2}$.

§. 16. Quodsi hanc expressionem ita determinare velimus, ut evanescat casu $x=0$, quoniam posuimus: $\omega=\int\frac{dx}{1-xx}=\frac{1}{2}C\frac{1+x}{1-x}$, hoc casu etiam evadit $\omega=0$. Sicque esse debebit $0=\frac{\mu\alpha}{\lambda}$; unde patet statui debere $\mu=0$; hocque modo integrale desideratum erit:

$y=\frac{-x\cos.\alpha\omega-\alpha\sin.\alpha\omega}{(1-xx)\cos.\alpha\omega}$, sive $y=\frac{-x-\alpha\,\text{tg.}\,\alpha\omega}{1-xx}$. Quomodo autem haec expressio satisfaciat, operae pretium erit examinare. Hunc in finem ante omnia notari oportet, ob $d\omega=\frac{dx}{1-xx}$ fore $d\,\text{tg.}\,\alpha\omega=\frac{\alpha dx}{(1-xx)\cos.\alpha\omega^2}$; tum vero $dy=\frac{-dx(1+xx)-\alpha\alpha dx\,\text{tg.}\,\alpha\omega^2-2\alpha x dx\,\text{tg.}\,\alpha\omega}{(1-xx)^2}$. Quare cum sit $yy=\frac{xx+2\alpha x\,\text{tg.}\,\alpha\omega+\alpha\alpha\,\text{tg.}\,\alpha\omega^2}{(1-xx)^2}$, erit

$$\frac{dy}{dx}+yy=\frac{-1-\alpha\alpha}{(1-xx)^2}.$$

Integratio
generalis aequationis propositae.

§. 17. Quoniam in solutione supra data posuimus $A=kk-bb+ac$, duos casus evolui oportet, alterum quo $A>ac-bb$, alterum vero quo $A<ac-bb$. Pro priore ergo casu poni poterit $A=kk-bb+ac$, uti supra (§. 3.) fecimus, tum vero cum supra §. 7. posuerimus $\int\frac{2kdx}{a+2bx+cxx}=s$,

nunc statuamus $\int \frac{dx}{a+2bx+cxx} = \omega$, ita ut fiat $s = 2k\omega$, atque integrale completum, quod §. 13. ita invenimus expressum: $y = \frac{\Delta q - p e^{2k\omega}}{\Delta - e^{2k\omega}}$, nunc, posito $\Delta = \frac{m}{n}$, transformabitur in hanc formam: $y = \frac{mqe^{-k\omega} - npe^{+k\omega}}{me^{-k\omega} - ne^{+k\omega}}$, existente

$$p = \frac{b+k+cx}{a+2bx+cxx} \text{ et } q = \frac{b-k+cx}{a+2bx+cxx},$$

ubi constans arbitraria continetur in litteris m et n. Hocque modo casu priori est satisfactum, quo est $A = kk - bb + ac$.

§. 18. Aggrediamur nunc alterum casum, quo fit $A < ac - bb$, ac propterea statuamus $A = ac - bb - \alpha\alpha$, qui casus ex praecedente nascitur, ponendo $k = \alpha\sqrt{-1}$. Ante autem vidimus, esse $e^{\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos.\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega$ et $e^{-\alpha\omega\sqrt{-1}} = \cos.\alpha\omega - \sqrt{-}\sin.\alpha\omega$, unde denominator praecedentis fractionis evadet:

$$m(\cos.\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega) - n(\cos.\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)$$

et jam constantes m et n ita accipiamus, ut iste denominator evadat realis, quod fiet sumendo $m = \lambda + \mu\sqrt{-1}$ et $n = -\lambda + \mu\sqrt{-1}$. Sic enim iste denominator induet hanc formam realem: $2\lambda\cos.\alpha\omega + 2\mu\sin.\alpha\omega$.

§. 19. Pro numeratore autem nunc habebimus:

$$mq = \frac{\lambda(b+cx) + \mu\alpha + (\mu(b+cx) - \lambda\alpha)\sqrt{-1}}{a+2bx+cxx}.$$

Simili modo reperiemus:

$$np = \frac{-\lambda(b+cx) - \mu\alpha + (\mu(b+cx) - \lambda\alpha)\sqrt{-1}}{a+2bx+cxx}.$$

Ponamus autem brevitatis gratia $mq = M + N\sqrt{-1}$ et

$np = -M + N\sqrt{-1}$, ita ut sit $M = \frac{\lambda(b+cx)+\mu a}{a+2bx+cxx}$ et $N = \frac{\mu(b+cx)-\lambda a}{a+2bx+cxx}$. Hocque modo numerator noster erit

$$(\cos.\alpha\omega - \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)(M + N\sqrt{-1})$$
$$+ (\cos.\alpha\omega + \sqrt{-1}\sin.\alpha\omega)(M - N\sqrt{-1})$$
$$= (2M\cos.\alpha\omega + 2N\sin.\alpha\omega)$$

ita ut nunc etiam numerator habeat formam realem.

§. 20. Cum igitur integrale nostrum completum sit $y = \frac{M\cos.\alpha\omega + N\sin.\alpha\omega}{\lambda\cos.\alpha\omega + \mu\sin.\alpha\omega}$, si loco M et N valores assumtos restituamus, istud integrale evadet:

$$y = \frac{\lambda(b+cx)\cos.\alpha\omega + \mu\alpha\cos.\alpha\omega + \mu(b+cx)\sin.\alpha\omega - \lambda\alpha\sin.\alpha\omega}{(a+2bx+cxx)(\lambda\cos.\alpha\omega + \mu\sin.\alpha\omega)}$$

ubi ratio inter quantitates λ et μ constantem arbitrariam involvit. Quod si integrale debeat evanescere, sumto $x=0$, quo casu etiam integrale $\omega = \int\frac{dx}{a+2bx+cxx}$ evanescet, constantes λ er μ ita determinabuntur, ut fiat $0 = \frac{\lambda b + \mu\alpha}{\lambda a}$, sive $\lambda = \alpha$ et $\mu = -b$, hocque modo integrale nostrum erit $y = \frac{\alpha cx\cos.\alpha\omega - \sin.\alpha\omega(\alpha\alpha + bb + bcx)}{(a+2bx+cxx)(\alpha\cos.\alpha\omega - b\sin.\alpha\omega)}$.

§. 21. His expeditis geminam integrationem hic sub finem uni obtutui exponamus.

I. Hujus aequationis: $dy + yydx = \frac{(ac - bb + kk)dx}{(a+2bx+cxx)^2}$, integrale completum est:

$$y = \frac{m(b+cx-k)e^{-k\omega} - n(b+cx+k)e^{k\omega}}{(a+2bx+cxx)(me^{-k\omega} - ne^{k\omega})}$$

ubi litterae m et n arbitrio nostro relinquuntur.

II. Hujus aequationis: $dy + yydx = \frac{(ac - bb - \alpha\alpha)dx}{(a+2bx+cxx)^2}$,

integrale completum est:

$$y = \frac{\lambda(b+cx)\,cos.\,\alpha\omega + \mu\alpha\,cos.\,\alpha\omega + \mu(b+cx)\,sin.\,\alpha\omega - \lambda\alpha\,sin.\,\alpha\omega}{(a+2bx+cxx)(\lambda\,cos.\,\alpha\omega + \mu\,sin.\,\alpha\omega)}$$

ubi litterae α et μ arbitrio nostro relinquuntur. Pro utroque autem casu ω exprimit integrale formulae $\int\frac{dx}{a+2bx+cxx}$, quod ita sumi censendum est, ut evanescat posito $x=0$.

§. 22. Neque vero totum negotium adhuc est confectum, sed unicus adhuc casus evoluendus restat, quo sive $k=0$, sive $\alpha=0$, ideoque $A=ac-bb$, quandoquidem hic casus medium interiacet inter binos tractatos, atque ex neutro, non nisi per longas ambages, deduci potest; multo autem magis expediet eum ex primis principiis repetere, ubi bina integralia particularia ita sunt constituta, ut esset $p=\frac{b+cx+k}{a+2bx+cxx}$ et $q=\frac{b+cx-k}{a+2bx+cxx}$, unde fit $p-q=\frac{2k}{a+2bx+cxx}$, atque pro praesenti casu statui debebit $k=0$.

§. 23. Spectemus igitur k tanquam quantitatem minimam, ac ponamus brevitatis gratia $p=q+o$, ut sit $o=\frac{2k}{a+2bx+cxx}$, tum vero prima operatio nobis suppeditavit hoc integrale: $l\frac{y-p}{y-q}+\int(p-q)\,dx=C$, quod igitur nunc erit $l\,1-\frac{o}{y-q}+\int\frac{2k\,dx}{a+2bx+cxx}=2\Delta k$, quae ergo expressio, ob $\int\frac{dx}{a+2bx+cxx}=\omega$, abit in hanc formam:

$\frac{-o}{y-q}+2k\omega=2\Delta k$, ita ut jam sit

$$\frac{o}{y-q}=\frac{2k}{(y-q)(a+2bx+cxx)}=2k\omega-2\Delta k=2k(\omega-\Delta),$$

hincque fit $y-q=\frac{1}{(\omega-\Delta)(a+2bx+cxx)}$, consequenter loco

q valore substituto prodibit:

$$y = \frac{b + cx}{a + 2bx + cxx} + \frac{1}{(\omega - \Delta)(a + 2bx + cxx)},$$

sive $y = \frac{(b + cx)(\omega - \Delta) + 1}{(\omega - \Delta)(a + 2bx + cxx)}$, quod est integrale completum hujus casus desiderati, quod ergo neque exponentialia neque circularia involvit.

——•○○○○○○⁀○○○○○○•——

DE INSIGNI PARADOXO,

QUOD IN ANALYSI MAXIMORUM ET MINIMORUM OCCURRIT.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 31 Maii 1779.

§. 1. In Paradoxon, quod hic sum expositurus, incidi sequens problema resolvens:

Tab. I. Fig. 1. *Sub recta horizontali AB describere curvam EY, cujus singula elementa Yy si in radicem quadratam distantiae YV ab illa recta multiplicentur, summa omnium horum productorum evadat minima.*

Paradoxon autem in hoc consistit, quod pluribus casibus aliae lineae exhiberi possunt, pro quibus ista summa minor reperiatur quam in curva per calculum inventa, etiamsi intra eosdem terminos contineantur. Praeterea vero etiam evenire potest, ut pro certis terminis propositis curva inventa evadat imaginaria, cum tamen pro aliis curvis, intra eosdem terminos describendis, summa illa memorata modo major existere possit, modo minor; ita ut etiam his casibus aliquod minimum locum habere debere videatur.

Haec igitur Paradoxa operae pretium videtur accuratius perpendere.

§. 2. Hunc in finem repraesentet EY curvam huic problemati satisfacientem, ad axem verticalem AC relatam, pro cujus puncto quovis Y ponatur abscissa $AX = x$, ipsi distantiae YV aequalis, applicata vero $XY = y$; unde posito $\partial y = p \partial x$ erit elementum curvae $Yy = \partial x \sqrt{1 + pp}$, sicque formula integralis, cujus valor omnium minimus esse debet, erit $\int \partial x \sqrt{x(1 + pp)}$.

§. 3. Si haec ad motum referamus, atque ponamus corpus curvam EY percurrens in singulis punctis Y celeritatem habere altitudini VY debitam, si haec dicatur $= v$, cum sit v ut $\sqrt{x}$, curva quaeritur, cujus si singula elementa per hanc celeritatem v multiplicentur, summa omnium horum productorum prodeat minima. At vero olim observavi productum ex spatio percurso in celeritatem convenire cum idea minimae actionis ab illustri *Maupertuis* olim stabilita; unde intelligitur, curvam, quam quaerimus, ipsam esse *Projectoriam*, quam corpus, utcunque projectum, libere describit, ideoque fore *Parabolam*.

§. 4. Cum igitur formula integralis, ad minimum reducenda, sit $\int \partial x \sqrt{x(1 + pp)}$, si ea comparetur cum forma generali $\int V \partial x$, pro qua posui $\partial V = M \partial x + N \partial y + P \partial p$,

demonstravi curvam quaesitam ista aequatione: $N\partial x = \partial P$ exprimi. Nostro igitur casu, quo $V = \sqrt{x(1+pp)}$, erit $M = \frac{\sqrt{1+pp}}{2\sqrt{x}}$, $N = 0$ et $P = \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1+pp)}}$. Cum autem esse debeat $\partial P = 0$, ista quantitas P erit constans; unde haec deducitur aequatio: $\frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{(1+pp)}} = \sqrt{a}$, haecque est aequatio naturam curvae quaesitae exprimens.

Tab. I. Fig. 2. §. 5. Quaeratur jam ex hac aequatione valor ipsius $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$, unde cum sit $p = \frac{\partial y}{\partial x}$ erit $\partial y = \frac{\partial x \sqrt{a}}{\sqrt{(x-a)}}$, cujus integratio praebet $y = 2\sqrt{ax - aa} + b$. Unde sumto $b = 0$, patet, curvam EY fore parabolam, circa axem AC descriptam, cujus vertex incidet in E, existente intervallo $AE = a$, quod simul distantiae foci parabolae a vertice aequatur, cujus ergo quadruplum erit parameter parabolae scil: $4a$. Hinc igitur patet, quaestioni nostrae satisfacere omnes parabolas, quarum axes sint verticales, verticum autem distantia a recta horizontali AB ipsi distantiae foci a vertice aequalis.

§. 6. Omnes igitur istae parabolae EY hanc habent proprietatem: ut si singula ejus elementa Yy in radicem quadratam distantiae YV ducantur, summa omnium horum productorum sit minima; unde operae pretium erit hunc valorem investigare. Quoniam autem supra invenimus $p = \sqrt{\frac{a}{x-a}}$, erit $\sqrt{1+pp} = \sqrt{\frac{x}{x-a}}$, hincque elementum curvae $Yy = \frac{\partial x \sqrt{x}}{\sqrt{x-a}}$,

quod ergo multiplicatum per $\sqrt{x}$ praebet $\frac{x\partial x}{\sqrt{x-a}}$, cujus integrale revera debet esse minimum. At vero hoc integrale pro toto arcu EY reperitur $= \frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quae ergo quantitas minor esse deberet, quam si ulla alia curva intra terminos E et Y describeretur, pro eaque valor ejusdem formulae integralis supputaretur.

§. 7. Interim tamen facile innumeri casus exhiberi possunt, pro quibus iste valor, rite computatus, revera minor reperitur quam valor modo inventus. Quod si enim loco curvae EY ex puncto E per rectas EA, AV, VY usque ad Y progrediamur, quae via utique multo major est, quam si per curvam EY processissemus, valor nostrae formulae integralis pro spatio EA reperitur $\frac{2}{3}a\sqrt{a}$; at pro spatio AV, ubi $x = 0$, valor evanescet; pro spatio vero VY habebitur $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$, ita ut pro tota via EAVY valor nostrae formulae futurus sit $= \frac{2}{3}a\sqrt{a} + \frac{2}{3}x\sqrt{x}$, qui quidem utique major est quam expressio inventa $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, quamdiu x non multo major accipitur quam a; at vero contrarium evenit, si x multo major accipiatur. Veluti, si sumto $a = 1$ statuatur $x = 100$, pro parabola formula nostra praebet $\frac{2}{3} \times 102\sqrt{99}$; at vero pro via EAVY, nostra formulae erit $\frac{2}{3} \times 1001$; unde cum proxime sit $\sqrt{99} = 10 - \frac{1}{20}$ ille valor proxime erit $\frac{2}{3} \times 1015$, ideoque revera major quam alter.

§. 8. Cum igitur minores valores pro x assumti cum indole minimi consentiant, majores vero dissentiant, inquiramus in limitem, quo dissensus incipiat, seu ubi fiat $(2a + x)\sqrt{x - a} = a\sqrt{a} + x\sqrt{x}$, quod quo facilius fieri possit sumamus $a = 1$ et $x = tt + 1$, ut habeatur aequatio $t(tt + 3) = 1 + (tt + 1)^{\frac{3}{2}}$, ideoque $(1 + tt)^{\frac{3}{2}} = t^3 + 3t - 1$, et sumtis quadratis erit:

$$t^6 + 3t^4 + 3tt + 1 = t^6 + 6t^4 - 2t^3 + 9tt - 6t + 1, \text{ sive}$$

$$3t^3 - 2tt + 6t - 6 = 0.$$

Ponatur $t = \frac{s}{3}$, ut prodeat haec aequatio: $s^3 - 2ss + 18s - 54 = 0$, hinc fit proxime $s = \frac{30}{11}$, ergo $t = \frac{10}{11}$, hincque $x = \frac{221}{121}$. Unde patet, ante quam x sumatur $= 2$, dissensum incipere.

Tab. I. Fig. 3. §. 9. Quo autem haec generalius evolvamus, curvam inventam ita instruamus, ut per data duo puncta F et H transeat, statuendo $Ff = f$, $Hh = h$, intervallum vero $fh = 2g$, ita ut, bisecto hoc intervallo in g, sit $fg = hg = g$. Quaeritur ergo tam positio axis parabolae quam ejus vertex E. Hunc in finem sit ut supra $AE = a$ et distantia $Ag = v$, ita ut sit $Af = v - g$ et $Ah = v + g$. His positis, si in aequatione nostra inventa $y = 2\sqrt{ax - aa}$ sumamus vel $y = v - g$, vel $y = v + g$, esse debebit vel $x = f$, vel $x = h$, unde nanciscimur has duas aequationes: $v - g = 2\sqrt{af - aa}$ et $v + g = 2\sqrt{ah - aa}$, ex quibus valores tam pro v quam pro x elici debent. Eliminato

vero v statim erit $g = -\sqrt{af - aa} + \sqrt{ah - aa}$, sive $g + \sqrt{af - aa} = \sqrt{ah - aa}$; unde sumtis quadratis fit $gg + 2g\sqrt{af - aa} + af - aa = ah - aa$, sive $2g\sqrt{af - aa} = a(h - f) - gg$, iterumque quadrando $4gg(af - aa) = aa\,(h - f)^2 - 2agg(h - f) + g^4$, sive $aa\,((h - f)^2 + 4gg) - 2agg\,(h + f) + g^4 = 0$. Pro hujus aequationis solutione ponamus $a = \frac{gg}{z}$, ut habeamus

$0 = zz - 2\,(h + f)\,z + (h - f)^2 + 4gg$, unde fit $z = (h + f) + 2\sqrt{hf - gg}$, ideoque $a = \frac{gg}{h + f + 2\sqrt{fh - gg}}$.

§. 10. Hinc jam statim patet, nisi fuerit $fh > gg$ curvam quaesitam esse imaginariam, sive his casibus nullam curvam per puncta F et H traduci posse; cum tamen pro omnibus, quas pro lubitu per haec puncta ducere licet, valor nostrae formulae integralis assignari queat, qui pro ratione curvae traductae modo major modo minor evadere potest, ita ut hinc natura minimi neutiquam excludi posse videatur.

§. 11. Quoties autem fuerit $fh > gg$, ob signum radicale ambiguum duae adeo exhiberi poterunt parabolae per puncta F et H transeuntes, cui utrique indoles minimi conveniet, cum tamen inter se plurimum discrepent. Quod quo clarius appareat, investigemus valorem illum, qui deberet esse minimus, ac primo quidem quaeramus valores formu-

larum $\sqrt{af-aa}$ et $\sqrt{ah-aa}$, pro quarum priori utamur aequatione supra §. 9. inventa: $2g\sqrt{af-aa}=a(h-f)-gg$, quae ob $x=\frac{gg}{f+h+2\sqrt{hf-gg}}$ praebet $\sqrt{af-aa}=-\frac{fg-g\sqrt{fh-gg}}{h+f+2\sqrt{fh-gg}}$. Hoc invento aequatio $\sqrt{ah-aa}=g+\sqrt{af-aa}$ praebet $\sqrt{ah-aa}=\frac{gh+g\sqrt{fh-gg}}{h+f+2\sqrt{fh-gg}}$, sive scribendo brev. gr. $\sqrt{fh-gg}$ simpliciter $\sqrt{\ldots}$, ut sit $a=\frac{gg}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$, erit $\sqrt{af-aa}=-\frac{g(f+\sqrt{\ldots})}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$ et $\sqrt{ah-aa}=\frac{g(h+\sqrt{\ldots})}{f+h+2\sqrt{\ldots}}$.

§. 12. Designemus nunc valorem nostrae formulae integralis pro curva quacunque nomine ejus momenti, et quia supra vidimus, momentum curvae EY (Fig. 2.) esse $\frac{2}{3}(2a+x)\sqrt{x-a}$, erit id etiam $\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+x)\sqrt{ax-aa}$ unde pro nostro casu momentum curvae EH (Fig. 3.) erit $=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+h)\sqrt{ah-aa}$, et momentum pro curva EF $=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a+f)\sqrt{af-aa}$, quod a praecedente subtractum relinquit momentum pro arcu proposito

FH $=\frac{2}{3\sqrt{a}}(2a(\sqrt{ah-aa}-\sqrt{af-aa})+h\sqrt{ah-aa}-f\sqrt{af-hh})$

quae expressio, si loco radicalium scribantur valores modo inventi, induit hanc formam:

$$\frac{2g}{3(f+h+2\sqrt{\ldots})\sqrt{a}}(2a(f+h+2\sqrt{\ldots})+ff+hh+(f+h)\sqrt{\ldots})$$

quae, si loco a ejus valor substituatur, abit in hanc

$\frac{2g}{3(f+h+2\sqrt{\ldots})\sqrt{a}}(2gg+ff+hh+(f+h)\sqrt{\ldots})$, sive in hanc: $\frac{2g}{3\sqrt{a}}\left(\frac{2gg+ff+hh+(f+h)\sqrt{\ldots}}{f+h+2\sqrt{\ldots}}\right)$.

Quod si haec posterior fractio multiplicetur supra et infra per $f+h-2\sqrt{\ldots}$. prodibit ejus numerator

$$=(f+h)(2gg+ff+hh)-2(f+h)(fh-gg)$$
$$+(2fh-ff-hh-4gg)\sqrt{\ldots}$$

qui reducitur ad hanc formam:

$$(f+h)(4gg+(h-f)^2)-(4gg+(h-f)^2)\sqrt{\ldots}.$$
$$=(4gg+(h-f)^2)(f+h-\sqrt{\ldots}).$$

At vero denominator prodibit $(h-f)^2+4gg$, sicque commode evenit ut evadat momentum quaesitum $=\frac{2g}{3\sqrt{a}}(f+h-\sqrt{\ldots})$. Quare cum $\sqrt{a}=\frac{g}{\sqrt{(f+h+2\sqrt{\ldots})}}$, erit hoc momentum pro arcu FH

$$=\tfrac{2}{3}(f+h-\sqrt{\ldots})(\sqrt{f+h+2\sqrt{\ldots}}).$$

§. 13. Quoties ergo fuerit $gg<fh$, ob signum radicale semper duo exhiberi poterunt minima, sive ab F ad H binos arcus parabolicos ducere licebit. Quin etiam, si haec ad motum projectionis referantur, ex puncto F duplici modo corpus cum celeritate altitudini Ff debita ita projici poterit, ut punctum H feriat. Ex quo facile intelligitur, hoc fieri non posse, nisi punctum H ultra certam distantiam fuerit remotum, quo ergo casu mirum non

est, curvam nostram fieri imaginariam, idque continget, quoties fuerit $gg > fh$.

§. 14. Contemplemur autem attentius casum, quo $gg = fh$, siquidem tum binae solutiones in unam coalescunt, ob $\sqrt{fh - gg} = 0$; tum vero arcus parabolicus FH jactum longissimum repraesentabit. Hoc igitur casu momentum istius arcus FH erit $\frac{2}{3}(f + h)^{\frac{3}{2}}$. Sin autem hic per viam $FfhH$ ad H usque progrediamur, erit momentum huic viae respondens $= \frac{2}{3}(f\sqrt{f} + h\sqrt{h})$, quod manifesto semper minus est quam illud, quod pro arcu parabolico FH invenimus, etiamsi hoc in suo genere sit minimum.

§. 15. Ad haec paradoxa explicanda notari oportet momentum viae $FfhH$ respondens etiam in suo genere esse minimum. Scilicet si puncta f et h aliquantum mutentur, momentum, quod respondet viae $Ff'h'H$ manifesto foret majus. Mirum igitur videbitur verum hoc minimum non a calculo fuisse nobis monstratum; verum ratio satis est manifesta, propterea quod haec via non est linea continua. Interim tamen etiam hic casus in calculo ipso comprehenditur. Cum enim esse debeat $\partial . \frac{p\sqrt{x}}{\sqrt{1+pp}} = 0$, evidens est hanc formulam, tam pro rectis Ff, quam pro hH, utpote verticalibus, esse revera $= 0$; at

vero pro via horizontali fh, propter $x = 0$, iterum evanescit. Ceterum satis notum est eandem lineam curvam saepenumero plures applicatas minimas, inter se maxime diversas, contineri posse, dummodo quaelibet applicata minor sit quam sibi proximae utrinque. Hincque etiam intelligitur, quando calculus inter puncta F et H duas exhibet curvas, momenta pro utraque minima esse posse, etiamsi a se invicem plurimum differant.

DE SUMMATIONE SERIERUM IN HAC FORMA CONTENTARUM:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^6}{36} + \text{etc.}$$

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 31 Maji 1779.

§. 1. Ex iis quae olim primus de summatione potestatum reciprocarum in medium attuli, duo tantum casus derivari possunt, quibus summam seriei hic propositae assignare licet: alter scilicet quo $a = 1$, ubi ostendi hujus seriei: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ etc. summam esse $= \frac{\pi\pi}{6}$, denotante π peripheriam circuli, cujus diameter $= 1$; alter vero casus est quo $a = -1$; tum enim, mutatis signis, hujus seriei: $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} -$ etc. summa est $= \frac{\pi\pi}{12}$. Praeterea vero methodo prorsus singulari inveni, casu $a = \frac{1}{2}$, hujus seriei: $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} +$ etc. summam esse $\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2$, denotante $l2$ logarithmum hyperbolicum binarii, qui est 0,69314718o. Neque vero, praeter hos casus, ullus alius adhuc constat, quo summam assignare liceat.

§. 2. Methodus autem, qua hunc postremum casum sum adeptus, ulterius extendi potest, ita ut inde plurimae insignes relationes inter binas pluresve series hujus formae reperiri queant. Innititur autem ista methodus hoc lemmate:

Lemma.

Si ponatur $p = \int \frac{\partial x}{x} l\, y$ *et* $q = \int \frac{\partial y}{y} l\, x$, *erit summa* $p + q = l x \,.\, l y + C$, *siquidem constans ita definiatur, ut unico casui satisfaciat.*

Hinc igitur sequentia problemata percurramus, pro varia scilicet relatione inter x et y.

Problema I.

Si fuerit $x + y = 1$, *binas illas formulas:* $p = \int \frac{dx}{x} l\, y$ *et* $q = \int \frac{dy}{y} l\, x$ *in series resolvere, ita ut hinc prodeat* $p + q = l x \,.\, l y + C$.

Solutio.

§. 3. Cum igitur sit $y = 1 - x$, erit $l y = - x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} -$ etc. hincque $p = \int \frac{\partial x}{x} l y = - \frac{x}{1} - \frac{xx}{4} - \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} -$ etc. Similique modo, ob $x = 1 - y$ et $l x = - y - \frac{yy}{2} - \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} -$ etc. erit $q = \int \frac{\partial y}{y} l\, x = - \frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} -$ etc. quamobrem harum duarum serierum summa erit $l x \,.\, l y + C$. Pro constante C definienda consideremus casum quo $x = 0$ et $y = 1$, ideoque $l x \,.\, l y = 0$; tum igitur erit:

$$p+q = -1 - \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{16} - \text{etc.} = -\tfrac{\pi\pi}{6}$$

unde elicitur $C = -\frac{\pi\pi}{6}$.

§. 4. Quoties ergo fuerit $x+y=1$, summa harum duarum serierum junctim sumtarum: $\frac{x}{1} + \frac{xx}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} +$ etc. $+ \frac{y}{1} + \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} +$ etc. erit $= \frac{\pi\pi}{6} - lx \,.\, ly$; hincque statim sequitur tertius casus supra memoratus. Sumto enim $x = \frac{1}{2}$, erit quoque $y = \frac{1}{2}$, ideoque ambae hae series inter se aequales, unde sequitur fore

$$\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{4\cdot 2^2} + \frac{1}{9\cdot 2^3} + \frac{1}{16\cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l\tfrac{1}{2})^2 = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

Praeterea vero, quoties fuerit $a+b=1$ ponaturque

$$A = \frac{a}{1} + \frac{aa}{4} + \frac{a^3}{9} + \text{etc. et } B = \frac{b}{1} + \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} + \text{etc.}$$

semper erit $A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \,.\, lb$. Hinc ergo si alterius harum serierum summa aliunde esset cognita, etiam alterius summa innotesceret. Hocque est illud ipsum problema, quod jam olim tractavi.

Problema II.

Si fuerit $x - y = 1$, *binas illas formulas:* $p = \int \frac{dx}{x} ly$ *et* $q = \int \frac{dy}{y} lx$ *in series resolvere, ita ut hinc prodeat* $p + q = lx \,.\, ly + C$.

Solutio.

§. 5. Cum hic sit $y = x - 1$, erit

$$ly = l(x-1) = lx + l(1 - \tfrac{1}{x}) = lx - \frac{1}{x} - \frac{1}{2xx} - \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{4x^4} - \text{etc.}$$

hincque $p = \int \frac{dx}{x} ly = \frac{1}{2}(lx)^2 + \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} +$ etc.

Deinde, ob $x = 1 + y$, erit $lx = \frac{y}{1} - \frac{yy}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} + \text{etc.}$ ideoque $q = \int \frac{\partial y}{y} lx = \frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$ quamobrem habebimus: $p + q = lx \,.\, ly + C$. Pro constante determinanda consideremus casum $y = 0$, quo fit $x = 1$ et $lx\, ly = 0$; tum igitur erit $p = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}$ et $q = 0$, unde definitur constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$.

§. 6. Hic igitur iterum duas habemus series, quarum conjunctim summam assignare valemus:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{1}{x} + \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} + \frac{1}{16x^4} + \text{etc.} \\ + \frac{y}{1} - \frac{yy}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(lx)^2 + lx\, ly$$
$$= \frac{\pi\pi}{6} + lx \,.\, l\frac{y}{\sqrt{x}}.$$

§. 7. Quod si ergo habeantur hae duae series:

$$A = \frac{a}{1} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^4}{16} + \text{etc. et}$$
$$B = \frac{b}{1} - \frac{b^2}{4} + \frac{b^3}{9} - \frac{b^4}{16} + \text{etc.}$$

ita ut sit $a = \frac{1}{x}$ et $b = y$, atque inter a et b haec detur relatio: $ab + a = 1$, erit $A + B = \frac{\pi\pi}{6} - la \,.\, lb\sqrt{a}$. Consideremus casum quo $b = a$ $(= -\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, ob $ab + a = 1)$, eritque $A + B = 2\left(\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.}\right)$; quocirca, existente $a = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$, hujus seriei: $\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \text{etc.}$ summa erit $\frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2} la \,.\, la\sqrt{a}$.

§. 8. Deinde etiam hic notatu dignus est casus, quo $b = -a$, atque adeo $A + B = 0$; hoc enim casu erit $\frac{\pi\pi}{6} = la \,.\, lb\sqrt{a}$. At quia $b = -a$, erit $-aa + a = 1$.

hincque $a = \frac{1+\sqrt{-3}}{2}$ et $b = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$. Jam cum sit $lb\sqrt{a} = \frac{1}{2}\, labb$, ob $bb = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ erit $abb = -1$, unde sequitur fore $\frac{\pi\pi}{6} = l\,\frac{1+\sqrt{-3}}{2} \,.\, l-1$, id quod egregie convenit cum expressione cognita peripheriae circuli per logarithmos imaginarios.

§. 9. Si poneremus hic $a = \frac{1}{2}$, foret $b = 1$, ideoque

$$B = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc. hincque}$$

$$A + B = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \text{etc.} + \frac{\pi\pi}{12} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l\,2)^2$$

unde prodiret tertius casus initio memoratus. At vero faciamus hic $b = \frac{1}{2}$, eritque $a = \frac{2}{3}$ et $l\,b\sqrt{a} = \frac{1}{2}\,l\,b\,b\,a$ $= \frac{1}{2}\,l\,\frac{1}{6} = -\frac{1}{2}\,l\,6$ et $l\,a = -\,l\,\frac{3}{2}$, unde habebimus

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.} \\ B &= \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{3}{2} \,.\, l\,6.$$

Subtrahamus hinc ex problemate primo hanc aequationem:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} \ \text{etc.} \\ +\, &\frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^2} \ \text{etc.} \end{aligned}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l\,3 \,.\, l\,\frac{3}{2}.$$

et remanebit

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} \\ -\, &\frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{4 \cdot 3^2} - \frac{1}{9 \cdot 3^3} - \frac{1}{16 \cdot 3^4} - \text{etc.} \end{aligned}\right\} = l\,3 \,.\, l\,\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\,l\,\frac{3}{2} \,.\, l\,6 = \frac{1}{2}\left(l\,\frac{3}{2}\right)^2.$$

Sicque nacti sumus hanc aequationem notatu dignam:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \text{etc.} = \frac{1}{2}\left(l\,\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}$$

Ubi ratio peripheriae π penitus e calculo excessit. Verum eadem relatio sequenti modo facilius eruitur.

Alia solutio ejusdem problematis.

§. 10. Manente evolutione prioris partis p, altera pars q, ob $lx = l(1+y) = ly + l(1+\frac{1}{y})$, hinc $lx = ly + \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2} + \frac{1}{3y^3}$ etc. erit $q = \int\frac{\partial y}{y}(lx) = \frac{1}{2}(ly)^2 - \frac{1}{y} + \frac{1}{4y^2} - \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} -$ etc. Nunc igitur erit $p + q = lx \,.\, ly + C$; ubi constans C inde definiri potest, quod posito $y = 1$ fit $x = 2$, hincque $p = \frac{1}{2}(l2)^2 + \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2 = \frac{\pi\pi}{12}$ et $q = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} -$ etc. $= -\frac{\pi\pi}{12}$, quibus valoribus substitutis pro hoc casu prodit $p + q = 0 = 0 + C$, consequenter $C = 0$.

§. 11. Verum haec constans etiam alio modo definiri potest. Ponamus brev. gr. $X = \frac{1}{x} + \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} +$ etc. et $Y = \frac{1}{y} - \frac{1}{4y^2} + \frac{1}{9y^3} - \frac{1}{16y^4} +$ etc., ut habeamus $p = \frac{1}{2}(lx)^2 + X$ et $Q = \frac{1}{2}(ly^2) - Y$, hincque fiet

$$p + q = \tfrac{1}{2}(lx)^2 + \tfrac{1}{2}(ly)^2 + X - Y = lx \,.\, ly + C;$$

unde deducimus

$$Y - X = \tfrac{1}{2}(lx)^2 + \tfrac{1}{2}(ly)^2 - lx \,.\, ly - C = \tfrac{1}{2}(l\tfrac{x}{y})^2 - C,$$

ubi notandum est, esse $y = x - 1$. Jam ad constantem C definiendam consideretur casus $x = \infty$, quo fit $X = 0$ et $Y = 0$; praeterea vero $l\frac{x}{y} = 0$, quibus notatis erit $0 = -C$, ideoque $C = 0$.

§. 12. Hinc igitur nacti sumus duas series X et Y, quarum differentia per solos logarithmos exprimitur, cum

sit $Y - X = \frac{1}{2}(l\frac{x}{y})^2 = \frac{1}{2}(l\frac{y+1}{y})^2$, ob $x = y + 1$. Ex hac forma, sumto $y = 2$, statim fluit relatio ante inventa:

$$\frac{1}{1.2} - \frac{1}{4.2^2} + \frac{1}{9.2^3} - \frac{1}{16.2^4} + \text{etc.}$$
$$= \frac{1}{2}(l\tfrac{3}{2})^2 + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{4.3^2} + \frac{1}{9.3^3} + \frac{1}{16.3^4} + \text{etc.}$$

Simili autem modo nunc multo generalius habebimus:

$$\frac{1}{1.y} - \frac{1}{4.y^2} + \frac{1}{9.y^3} - \frac{1}{16.y^4} + \text{etc}$$
$$= \frac{1}{2}(l\frac{y+1}{y})^2 + \frac{1}{1(y+1)} + \frac{1}{4(y+1)^2} + \frac{1}{9(y+1)^3} + \text{etc.}$$

ubi loco y quicquid lubuerit accipere licet.

Problema III.

Si inter x et y haec detur relatio: $xy + x + y = c$, binas formulas $p = \int\frac{\partial x}{x}ly$ et $q = \int\frac{\partial y}{y}lx$ in series resolvere, ita ut hinc prodeat $p + q = lx . ly + C$.

Solutio.

§. 13. Hinc igitur primo erit $y = \frac{c-x}{1+x}$, cujus logarithmus per duas series sequentes exprimitur:

$$ly = \begin{cases} lc - \frac{x}{c} - \frac{x^2}{2c^2} - \frac{x^3}{3c^3} - \frac{x^4}{4c^4} - \text{etc.} \\ -x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{etc.} \end{cases}$$

unde fit

$$p = \int\frac{\partial x}{x}ly = \begin{cases} lc . lx - \frac{x}{c} - \frac{x^2}{4c^2} - \frac{x^3}{9c^3} - \frac{x^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ \qquad - x + \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} - \text{etc.} \end{cases}$$

Simili modo, cum sit $x = \frac{c-y}{1+y}$, erit

$$q = \int \frac{\partial y}{y}\, lx = \begin{cases} lc\,.\,ly - \frac{y}{c} - \frac{y^2}{4c^2} - \frac{y^3}{9c^3} - \frac{y^4}{16c^4} - \text{etc.} \\ \qquad - \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} - \text{etc.} \end{cases}$$

Atque hinc erit $p + q = lx\,.\,ly + C$.

§. 14. Pro constante definienda consideremus casum quo $x = 0$, ideoque $p = lc\,.\,lx$ et

$$\left.\begin{array}{l} q = (lc)^2 - 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} - \text{etc.} \\ \qquad - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.} \end{array}\right\}$$

sive $q = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \frac{c^4}{16} - \text{etc.}$, unde aequatio nostra evadit $p + q = lc\,.\,lx + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.}$ $= lc\,.\,lx + C$, ubi ergo termini $lc\,.\,lx$ se mutuo destruunt, ita ut sit $C = (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - \frac{c}{1} + \frac{c^2}{4} - \frac{c^3}{9} + \text{etc.}$

§. 15. Hic ergo quinque occurrunt series infinitae, quas sequenti modo indicemus:

$$\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \frac{c^4}{16} + \text{etc.} = O$$
$$\frac{x}{c} + \frac{x^2}{4\cdot c^2} + \frac{x^3}{9\cdot c^3} + \frac{x^4}{16\cdot c^4} + \text{etc.} = P$$
$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.} = Q$$
$$\frac{y}{c} + \frac{y^2}{4\cdot c^2} + \frac{y^3}{9\cdot c^3} + \frac{y^4}{16\cdot c^4} + \text{etc.} = R$$
$$\frac{y}{1} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} - \frac{y^4}{16} + \text{etc.} = S,$$

quibus litteris introductis nostra aequatio erit:

$$lc\,.\,lx - P - Q + lc\,.\,ly - R - S = lx\,.\,ly + (lc)^2 - \frac{\pi\pi}{6} - O,$$

unde sequitur fore:

$$O - P - Q - R - S = lx\,.\,ly + (lc)^2 - lc\,.\,lx - lc\,.\,ly - \frac{\pi\pi}{6},$$

quae expressio contrahitur in sequentem:

$$O - P - Q - R - S = l\frac{x}{c} \,.\, l\frac{y}{c} - \frac{\pi\pi}{6},$$ sive mutatis signis:

$$P + Q + R + S - O = \frac{\pi\pi}{6} - l\frac{x}{c} \,.\, l\frac{y}{c}.$$

§. 16. Hic casus satis memorabilis occurrit, quando $c = 1$, quia tum fit

$$P + Q = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{9} + \frac{2x^5}{25} + \text{etc.}$$

$$\text{et } R + S = \frac{2y}{1} + \frac{2y^3}{9} + \frac{2y^5}{25} + \text{etc.};$$

tum vero $O = \frac{\pi\pi}{12}$, sicque inter binas series satis simplicem relationem sumus assecuti, quae est:

$$\left.\begin{matrix} + \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \frac{x^7}{49} + \text{etc.} \\ + \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \frac{y^7}{49} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} lx \,.\, ly,$$

ubi notandum est fore $xy + x + y = 1$, hinc sive $y = \frac{1-x}{1+x}$, sive $x = \frac{1-y}{1+y}$, cujus aliquot exempla evolvisse juvabit.

§. 17. 1°) Si $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$, unde sequitur aequatio:

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{1.2} + \frac{1}{9.2^3} + \frac{1}{25.2^5} + \frac{1}{49.2^7} + \text{etc.} \\ + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{9.3^3} + \frac{1}{25.3^5} + \frac{1}{49.3^7} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l2 \,.\, l3.$$

2°) Si $x = \frac{1}{4}$, erit $y = \frac{3}{5}$, ideoque

$$\left.\begin{matrix} \frac{1}{1.4} + \frac{1}{9.4^3} + \frac{1}{25.4^5} + \frac{1}{49.4^7} + \text{etc.} \\ + \frac{3}{1.5} + \frac{3^3}{9.5^3} + \frac{3^5}{25.5^5} + \frac{3^7}{49.5^7} + \text{etc.} \end{matrix}\right\} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l4 \,.\, l\frac{5}{3}.$$

3°) Quin etiam datur casus quo $x = y$, quod evenit ponendo $x = y = -1 + \sqrt{2} = a$; tum igitur fiet:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(la)^2.$$

§. 18. In genere igitur etiam, quicquid fuerit c, operae pretium erit casum perpendere, quo fit $x = y$, quod evenit si $x = y = -\frac{1+\sqrt{1+c}}{2} = a$; tum igitur erit:

$$P = R = \frac{a}{c} + \frac{a^2}{4.c^2} + \frac{a^3}{9.c^3} + \frac{a^4}{16.c^4} + \text{etc.}$$

$$Q = S = \frac{a}{1} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.}$$

unde deducitur ista aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{a}{1.c} + \frac{a^2}{4.c^2} + \frac{a^3}{9.c^3} + \frac{a^4}{16.c^4} + \text{etc.} \\ + \frac{a}{1} - \frac{a^2}{4} + \frac{a^3}{9} - \frac{a^4}{16} + \text{etc.} \end{array}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}\left(l\frac{c}{c}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{c}{1} - \frac{c^2}{4} + \frac{c^3}{9} - \text{etc.}\right).$$

Hinc plurimas egregias relationes inter ternas hujusmodi series derivare licet, quae ergo evadunt rationales, quoties fuerit $1 + c$ quadratum.

§. 19. Plures alias relationes inter binos numeros x et y evolvere liceret, in hac scilicet forma generali contentas: $xy \pm \alpha x \pm \beta y = \gamma$, quae autem, posito $x = \beta t$ et $y = \alpha u$, in hanc simpliciorem mutatur: $tu \pm t \pm u = \frac{\gamma}{\alpha\beta}$, ubi tantum varietas signorum in computum venit. Verum quia hinc plerumque tres pluresve series reperiuntur, alteriori evolutioni hic non immoror, sed potissimum iis casibus inhaerebo, quibus relatio inter duas tantum hujusmodi series definitur, quos igitur in sequentibus theorematibus sum complexurus.

Theorema I.

§. 20. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc. } et$$

$$Y = \frac{y}{1} + \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^4}{16} + \text{etc.}$$

fueritque $x + y = 1$; *tum semper erit:*

$$X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - lx \,.\, ly.$$

cujus theorematis demonstratio in §. 4. jam est tradita.

Corollarium I.

§. 21. Hic ante omnia manifestum est, summas harum serierum reales esse non posse, simulac vel x vel y unitatem superaverit. Summa quidem his casibus videtur in infinitum excrescere; verum ea fit adeo imaginaria, cum, ob y negativum, logarithmus y imaginarius evadat.

Corollarium II.

§. 22. Usus hujus theorematis potissimum iis casibus cernitur, quibus x parum ab unitate deficit, ideoque prior series X parum convergit; tum enim altera Y eo magis converget. Veluti si fuerit $x = \frac{9}{10}$, erit:

$$X = \frac{9}{10} + \frac{9^2}{4 \,.\, 10^2} + \frac{9^3}{9 \,.\, 10^3} + \frac{9^4}{16 \,.\, 10^4} + \text{etc.},$$

series vix convergens, cujus tamen summa per nostrum theorema facile quam proxime assignari poterit. Cum enim sit $Y = \frac{1}{10} + \frac{1}{4 \,.\, 10^2} + \frac{1}{9 \,.\, 10^3} + \frac{1}{16 \,.\, 10^4} + \text{etc.}$, quae series est maxime convergens, erit utique $X = \frac{\pi\pi}{6} - l\,10 \,.\, l\,\frac{10}{9} - Y$.

Corollarium III.

§. 23. Ita in genere, si statuamus $x = \frac{m}{m+n}$ et $y = \frac{n}{m+n}$, erit $X = \frac{m}{1(m+n)} + \frac{m^2}{4(m+n)^2} + \frac{m^3}{9(m+n)^3} +$ etc. et

$$Y = \frac{n}{1(m+n)} + \frac{n^2}{4(m+n)^2} + \frac{n^3}{9(m+n)^3} + \text{etc.};$$

tum igitur erit $X + Y = \frac{\pi\pi}{6} - l\frac{m+n}{m} \cdot l\frac{m+n}{n}$.

Theorema II.

§. 24. *Si habeantur hae duae series:*

$$X = \frac{1}{x} - \frac{1}{4xx} + \frac{1}{9x^3} - \frac{1}{16x^4} + \text{etc.}$$

$$Y = \frac{1}{y} + \frac{1}{4yy} + \frac{1}{9y^3} + \frac{1}{16y^4} + \text{etc.}$$

existente $y = x + 1$, *semper erit*

$$X - Y = \frac{1}{2}(l\frac{y}{x})^2 = \frac{1}{2}(l\frac{x+1}{x})^2,$$

cujus demonstratio colligitur ex §. 12, dummodo litterae x, y et X, Y, permutantur.

Corollarium I.

§. 25. Quia hic est $y = x + 1$, posterior series Y magis convergit quam prior X. Quin etiam, si prior series X fuerit adeo divergens, quod evenit, quando x est fractio unitate minor, posterior nihilominus manet convergens. Veluti si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{3}{4}$, ipsae vero series erunt:

$$X = \frac{2}{1} - \frac{2^2}{4} + \frac{2^3}{9} - \frac{2^4}{16} + \frac{2^5}{25} - \text{etc. et}$$

$$Y = \frac{2}{3} + \frac{2^2}{4 \cdot 3^2} + \frac{2^3}{9 \cdot 3^3} + \frac{2^4}{16 \cdot 3^4} + \text{etc.}$$

consequenter erit $X - Y = \frac{1}{2}(l\,3)^2$.

Quia vero posterior series y parum convergit, eam per theorema primum hoc modo reducimus:

$$\frac{2}{1\cdot 3}+\frac{2^2}{4\cdot 3^2}+\frac{2^3}{9\cdot 3^3}+\text{etc.}=\frac{\pi\pi}{6}-l\,3\,.\,l\,\frac{3}{2}-\frac{1}{1\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 3^2}-\frac{1}{9\cdot 3^3}-\text{etc.}$$

hincque habebimus hanc summationem:

$$\frac{2}{1}-\frac{2^2}{4}+\frac{2^3}{9}-\frac{2^4}{16}+\text{etc.}=\frac{1}{2}(l\,3)^2+\frac{\pi\pi}{6}-l\,3\,.\,l\,\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 3^2}+\frac{1}{9\cdot 3^3}+\text{etc.}\right)$$

Corollarium II.

§. 26. Sumamus nunc in genere $x=\frac{1}{n}$, ut sit series summanda $X=\frac{n}{1}-\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{9}-\frac{n^4}{16}+\text{etc.}$, tum vero ob $y=\frac{1+n}{n}$ altera series erit $Y=\frac{n}{n+1}+\frac{nn}{4(n+1)^2}+\frac{n^2}{9(n+1)^2}$ etc. hincque $X=\frac{1}{2}(l\,n+1)^2+Y$. At vero per theorema I. est $Y=\frac{\pi\pi}{6}-l\,(n+1)\,.\,l\,\frac{n+1}{n}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{4(n+1)^2}-\frac{1}{9(n+1)^3}-\text{etc.}$ quo valore substituto erit:

$$X=\frac{1}{2}(l(n+1))^2+\frac{\pi\pi}{6}-l(n+1)\,.\,l\frac{n+1}{n}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2}+\frac{1}{9(n+1)^3}+\text{etc.}\right)$$

quae expressio contrahitur in hanc:

$$\frac{n}{1}-\frac{n^2}{4}+\frac{n^3}{9}-\frac{n^4}{16}+\text{etc.}$$

$$=\frac{1}{2}\,l\,(n+1)\,.\,l\,\frac{nn}{n+1}+\frac{\pi\pi}{6}-\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{4(n+1)^2}+\frac{1}{9(n+1)^3}+\text{etc.}\right).$$

Theorema III.

§. 27. *Si habeantur hae duae series:*

$$X=\frac{x}{1}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}-\frac{x^4}{16}+\text{etc. } \textit{et}$$

$$X=\frac{1}{x}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{9x^3}-\frac{1}{16x^4}+\text{etc.}$$

erit $X+Y=\frac{\pi\pi}{6}+\frac{1}{2}(l\,x)^2$.

Demonstratio in praecedentibus non continetur, verum ea hoc modo facile adornatur:

Cum per formulam integralem sit $X = \int \frac{\partial x}{x} l(1+x)$, loco x scribendo $\frac{1}{x}$ erit $Y = -\int \frac{\partial x}{x} l \frac{x}{1+x}$, sive

$$Y = -\int \frac{\partial x}{x} l(1+x) + \int \frac{\partial x}{x} lx,$$

hincque addendo $X + Y = \int \frac{\partial x}{x} lx = \frac{1}{2}(lx)^2 + C$; ubi constans ex casu $x = 1$ facillime definitur. Quia enim hoc casu fit tam X quam $Y = \frac{\pi\pi}{12}$, erit constans $C = \frac{\pi\pi}{6}$, ideoque $X + Y = \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2$.

Corollarium I.

§. 28. Quod si ergo pro x numerus quantumvis magnus accipiatur, ope hujus theorematis summa seriei X, quae maxime est divergens, facillime assignatur, cum reducatur ad seriem Y, quae eo magis est convergens, quo magis prior divergit.

Corollarium II.

§. 29. Nunc vero, ope theorematis secundi, series $Y = \frac{1}{x} - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{9x^3} -$ etc. reducitur ad hanc formam:

$$Y = \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 + \frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}$$

quo valore substituto prodibit sequens aequatio:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} + \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2 - \left(\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4(x+1)^2} + \frac{1}{9(x+1)^3} + \text{etc.}\right)$$

quae expressio cum superiori §. 26. egregie convenit, quia est $l(x+1) \cdot l\frac{xx}{x+1} = \frac{1}{2}(lx)^2 - \frac{1}{2}\left(l\frac{x+1}{x}\right)^2$, uti evolventi facile patebit.

Theorema IV.

§. 30. *Si habeantur hae series:*

$$X = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^5}{25} + \text{etc. } et\ Y = \frac{y}{1} + \frac{y^3}{9} + \frac{y^5}{25} + \text{etc.},$$

existente $xy + x + y = 1$, *sive* $x = \frac{1-y}{1+y}$, *vel* $y = \frac{1-x}{1+x}$,

erit $X + Y = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} lx . ly$.

Demonstratio manifesta est ex §. 16.

Corollarium I.

§. 31. Hic iterum, ut supra, observandum est, summas harum serierum fieri imaginarias, simulac litterae x et y unitatem superaverint. At si fuerit $x < 1$, tum semper alia series ejusdem formae exhiberi potest, cujus summa ab illa pendeat. Ita si fuerit $x = \frac{1}{2}$, erit $y = \frac{1}{3}$. At si x prope ad unitatem accedat, veluti $x = \frac{9}{10}$, altera series Y maxime converget.

Corollarium II.

§. 32. In his quatuor theorematibus omnes casus contineri videntur, quibus binas hujusmodi series inter se comparare licet. Ad quod ostendendum sequens theorema speciale subjungamus, quod demum per longas calculi ambages sum adeptus, quod autem nunc satis commode ex praecedentibus theorematibus deduci potest.

Theorema speciale.

§. 33. *Si habeantur hae series sibi affines:*

$$A = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc. } et$$

$$B = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}; \ tum \ erit$$

$$2A + B = \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l\,3)^2.$$

Demonstratio:

Cum ex theoremate primo, sumto $x = y = \frac{1}{2}$, sit $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l\,2)^2$, haec series sequenti modo resoluta repraesentari potest:

$$2\left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{25 \cdot 2^5} + \text{etc.}\right) - 1\left(\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{9}{9 \cdot 2^3} - \text{etc.}\right) = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l2)^2.$$

Nunc vero per theorema IV., sumto $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, habemus hanc aequationem:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{25 \cdot 2^5} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8} - \frac{1}{2} l\,2 \,.\, l\,3 - \frac{1}{1 \cdot 3} - \frac{1}{9 \cdot 3^3} - \frac{1}{25 \cdot 3^5} - \text{etc.}.$$

Deinde vero ex theoremate secundo, sumto $x = 2$ et $y = 3$, erit:

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} - \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{1}{2}(l\tfrac{3}{2})^2 + \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}$$

Substituantur jam hi valores loco illarum serierum, ac pro parte sinistra prodibit:

$$\left.\begin{matrix} \frac{\pi\pi}{4} - l\,2 \,.\, l\,3 - 2\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ - \frac{1}{2}(l\tfrac{3}{2})^2 - \left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{matrix}\right\} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l\,2)^2.$$

Unde concludimus fore:

$$\left.\begin{matrix} 2\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \frac{1}{25 \cdot 3^5} + \text{etc.}\right) \\ + 1\left(\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{4 \cdot 3^2} + \frac{1}{9 \cdot 3^3} + \text{etc.}\right) \end{matrix}\right\} = \frac{\pi\pi}{6} - l\,2 \,.\, l\,3 - \frac{1}{2}(l\tfrac{3}{2})^2 + \frac{1}{2}(l\,2)^2$$

$$= \frac{\pi\pi}{6} - \frac{1}{2}(l\,3)^2 \ (\text{ob } (l\tfrac{3}{2})^2 = (l\,3)^2 - 2\,l\,2 \,.\, l\,3 + (l\,2)^2).$$

§. 34. Quomodocunque autem theoremata hic data inter se combinentur, vix alia relatio inter binas hujusmodi series elici potest, multo minus autem inde ejusmodi series simplices eruere licet, quarum summa absolute exhiberi queat, praeter casus jam indicatos, quos igitur hic conjunctim ob oculos ponamus.

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{6}$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} - \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{4 \cdot 2^2} + \frac{1}{9 \cdot 2^3} + \frac{1}{16 \cdot 2^4} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{12} - \frac{1}{2}(l\,2)^2$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{8}$$

Praeterea vero adjungi potest adhuc ista series:

$$\frac{a}{1} + \frac{a^3}{9} + \frac{a^5}{25} + \frac{a^7}{49} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{16} - \frac{1}{4}(l\,a)^2$$

existente $a = \sqrt{2} - 1$. Quanquam autem in hac serie valor ipsius a sit irrationalis, ideoque quaevis potestas seorsim evolvi debere videatur, tamen numeratores etiam seriem recurrentem constituunt, in qua quilibet terminus per binos praecedentes definiri potest ope hujus formulae: $a^{n+4} = 6a^{n+2} - a^n$, cujus veritas inde elucet, quod sit, per a^n dividendo, $a^4 = 6aa - 1$. Quia enim $a = \sqrt{2} - 1$, erit $a^2 = 3 - 2\sqrt{2}$ et $a^4 = 17 - 12\sqrt{2}$, unde veritas fit manifesta.

DE TRANSFORMATIONE FUNCTIONUM, DUAS VARIABILES INVOLVENTIUM, DUM EARUM LOCO ALIAE BINAE VARIABILES INTRODUCUNTUR.

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhib. die 18 Octobris 1779.

§. 1. Etsi hoc argumentum in tertio volumine Institutionum mearum calculi integralis jam fusius pertractavi, tamen hic methodum sum traditurus, cujus ope tales transformationes multo facilius expediri queant. Si igitur z fuerit functio quaecunque binarum variabilium x et y, harumque loco aliae binae variabiles quaecunque t et u in calculum introducantur, quaestio huc redit: quamadmodum omnes formulae differentiales, ex proposita functione z oriundae, cujusmodi sunt $(\frac{\partial z}{\partial x})$; $(\frac{\partial z}{\partial y})$; $(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$; $(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y})$; $(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$; etc. per binas novas variabiles t et u exprimantur?

§. 2. Quoniam relatio inter binas variabiles x et y, respectu novarum t et u, cognita assumitur, non solum binae priores x et y tanquam functiones binarum posteriorum t et u spectari poterunt, sed etiam istae t et u

erunt certae functiones binarum priorum x et y, quam relationem per sequentes formulas differentiales repraesentabo:

$$\partial t = P\partial x + Q\partial y \text{ et } \partial u = R\partial x + S\partial y,$$

quae ut sint determinatae, necesse est fieri: $\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial Q}{\partial y}\right)$ et $\left(\frac{\partial R}{\partial y}\right) = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)$; ubi litterae P, Q, R, S non solum tanquam functiones ipsarum x et y sed etiam ipsarum t et u spectari poterunt, ob cognitam rationem, quam hae binae variabiles inter se tenent.

§. 3. His positis primo investigemus valores formularum differentialium primi gradus, quae sunt $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, quos accipient per novas variabiles t et u. Ac primo quidem, cum sit tam $\partial z = \partial x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ quam $\partial z = \partial t \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \partial u \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, loco ∂t et ∂u valores ante stabilitos scribendo prodibit ista aequatio:

$$\partial x \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) + \partial y \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = P\partial x \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + Q\partial y \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + R\partial x \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + S\partial y \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Hic evidens est utrinque terminos, eodem differentiali ∂x vel ∂y affectos, seorsim inter se aequari debere; unde colligimus has duas aequationes:

$$\text{I.} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$

$$\text{II.} \quad \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

ubi jam litterae P, Q, R, S tanquam functiones ipsarum t et u spectari poterunt, sicque formulae differentiales $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ per binas novas $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ exprimuntur.

§. 4. Multo autem difficilius est hinc valores formularum differentialium secundi gradus, quae sunt $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$; $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\partial y}\right)$; $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$ elicere, id quod tamen sequenti modo satis commode praestari poterit. Incipiamus a prima harum formularum $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right)$, quae oritur ex formula $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, si ea differentietur, sumto $\partial y = 0$, et differentiale denuo per ∂x dividatur. At vero, sumto $\partial y = 0$, ex formulis principalibus erit $\partial t = P\partial x$ et $\partial u = R\partial x$, unde fit $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) = P$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = R$. Hinc tantum opus est ut formulae $P\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ differentiale per ∂x dividatur, pro casu scilicet $\partial y = 0$. Cum autem jam P et Q sint functiones binarum t et u, earum differentialia talem habebunt formam: $M\partial t + N\partial u$; unde ergo, ob $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) = P$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = R$, pro $\frac{\partial P}{\partial x}$ habebimus $MP + NR$. Simili modo etiam $\frac{\partial Q}{\partial x}$ ad functionem ipsarum t et u reducetur, quae reductio cum per se sit manifesta, in calculo retineamus $\frac{\partial P}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial x}$. Interim tamen, cum sit $M = \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right)$ et $N = \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)$, erit $\frac{\partial P}{\partial x} = P\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)$; similique modo erit $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right)$.

§. 5. Superest ergo ut etiam formulas $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ et $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ eadem lege tractemus. Cum igitur in genere sit:

$$\partial . \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = \partial t \left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + \partial u \left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right),$$

hoc per ∂x divisum, ob $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) = P$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = R$, evadet

$$P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + R\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right) = \frac{\partial . \frac{\partial z}{\partial t}}{\partial x}.$$

Simili modo $\frac{1}{\partial x} \partial . \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = P \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + R \left(\frac{\partial \partial z}{\partial u^2}\right)$. His ergo observatis erit:

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + PP \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t^2}\right) + PR \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right)$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + RP \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + RR \left(\frac{\partial \partial z}{\partial u^2}\right),$$

quae formula contrahitur in hanc:

$$\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial R}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + PP \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t^2}\right)$$
$$+ 2PR \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + RR \left(\frac{\partial \partial z}{\partial u^2}\right).$$

§. 6. Aggrediamur jam secundam formulam $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x \partial y}\right)$, quae primo ex formula $\frac{\partial z}{\partial x}$ derivari potest, eam scilicet differentiando, sola y pro variabili sumta, ita ut sit $\partial x = 0$. Deinde etiam illa formula derivari potest ex formula $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)$, eam differentiando, sumta sola x variabili, ideoque $\partial y = 0$. Evolvamus primo hoc modo formulam $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$, et quia sumto $\partial x = 0$ fit $\partial t = Q \partial y$ et $\partial u = S \partial y$, ideoque $\left(\frac{\partial t}{\partial y}\right) = Q$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) = S$, hinc ex quantitatibus P et R oriuntur formulae $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial y}$, quarum valores, uti casu praecedente, per se erunt cogniti. Erit scil. $\frac{\partial P}{\partial y} = Q \left(\frac{\partial P}{\partial t}\right) + S \left(\frac{\partial P}{\partial u}\right)$; similique modo erit $\frac{\partial R}{\partial y} = Q \left(\frac{\partial R}{\partial t}\right) + S \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)$, quarum autem loco retineamus formas $\frac{\partial P}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial y}$. Porro vero habebimus:

$$\frac{1}{\partial y} \partial . \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = Q \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t^2}\right) + S \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right)$$
$$\frac{1}{\partial y} \partial . \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = Q \left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + S \left(\frac{\partial \partial z}{\partial u^2}\right).$$

His igitur colligendis reperiemus:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + PQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + PS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right)$$
$$+ \frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + QR\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) + RS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quam etiam hoc modo exprimere licet:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ PQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + (PS + QR)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) + RS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right).$$

§. 7. Eundem autem valorem etiam ex altera formula $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ elicere licebit, eam differentiando, sumta sola y variabili, ideoque $\partial y = 0$; unde fit $\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right) = P$ et $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = R$. Hinc igitur primo habemus $P\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$, similique modo $\frac{\partial S}{\partial x} = P\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)$. Deinde erit uti in primo casu:

$$\frac{1}{\partial x}\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) = P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + R\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) \text{ et}$$
$$\frac{1}{\partial x}\partial \cdot \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = P\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) + R\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quibus collectis orietur:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + PQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + QR\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right)$$
$$+ \frac{d S}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + PS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) + RS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quae etiam hoc modo repraesentari potest:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial S}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ PQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + (QR + PS)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}\right) + RS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quae formula cum praecedente egregie convenit: initio enim jam notavimus esse $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial S}{\partial x}$.

§. 8. Tertia denique formula $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$ derivari debet ex formula $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$, sumendo $\partial x = 0$, unde fit

$\frac{\partial t}{\partial y} = Q$ et $\frac{\partial u}{\partial y} = S$. Hinc ergo fiet

$$\frac{\partial Q}{\partial y} = Q\left(\frac{\partial Q}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial Q}{\partial u}\right) \text{ et } \frac{\partial S}{\partial y} = Q\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right).$$

Deinde erit $\frac{1}{\partial y}\,\partial\,.\,\frac{\partial z}{\partial t} = Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + S\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right)$

$$\frac{1}{\partial y}\,\partial\,.\,\frac{\partial z}{\partial u} = Q\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + S\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quibus collectis fiet:

$$\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + QQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + QS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right)$$
$$+ \frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + QS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + SS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

sive concinnius:

$$\frac{\partial\partial z}{\partial y^2} = \frac{\partial Q}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ QQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + 2QS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + SS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right).$$

§. 9. Istos jam valores pro formulis differentialibus secundi gradus inventos heic uni obtutui exponamus:

$$\text{I. } \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial P}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial R}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ PP\left(\frac{\partial\partial z}{\partial s^2}\right) + 2PR\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + RR\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

$$\text{II. } \left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) = \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial R}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ PQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + (PS + QR)\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + RS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

$$\text{III. } \left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = \frac{\partial Q}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ QQ\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right) + 2QS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + SS\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right),$$

quibus jungantur formulae differentiales primi gradus:

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = P\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + R\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = Q\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + S\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right).$$

Manifestum autem est eadem hac methodo inveniri posse valores formularum differentialium tertii gradus, quae sunt $\frac{\partial^3 z}{\partial t^3}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial t^2 \partial u}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial t \partial u^2}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial u^3}$. Atque adeo ulterius progredi liceret; verum quia formulae nimis complexae essent proditurae, sufficiat methodum tantum exposuisse.

Problema.

Investigare casus, quibus hanc aequationem differentio-differentialem: $(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}) = vv (\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$ generaliter integrare liceat, ope transformationis ante explicatae.

Solutio.

Si hic loco formularum $(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2})$ et $(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2})$ valores modo inventos substituamus, orietur sequens aequatio:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial t}) + \frac{\partial R}{\partial x}(\frac{\partial z}{\partial u}) + PP(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}) + 2PR(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}) + RR(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2})$$
$$= vv[\frac{\partial Q}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial t}) + \frac{\partial S}{\partial y}(\frac{\partial z}{\partial u}) + QQ(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}) + 2QS(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u}) + SS(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2})].$$

Nunc igitur quaeritur, quomodo novae variabiles t et u accipi oporteat, ut haec aequatio integrationem admittat. Hunc in finem efficiamus primo ut partes $(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2})$ se mutuo destruant, quod eveniet si fuerit $PP = QQvv$, ideoque $P = \pm Qv$. Simili modo partes $(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2})$ se distruent casu $RR = SSvv$, ideoque $R = \pm Sv$. Sumto autem $P = +Qv$, necessario sumi debet $R = -Sv$, quio alioquin etiam partes $(\frac{\partial\partial z}{\partial t \partial u})$ se mutuo destruerent.

§. 11. Sumamus igitur $P = Qv$ et $R = -Sv$, atque nostra aequatio induet hanc formam:

$$\frac{\partial . Qv}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \frac{\partial . Sv}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) - 2QSvv\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right)$$
$$= vv\frac{\partial Q}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + vv\frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2QSvv\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right),$$

sive

$$\frac{\partial . Qv}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right) - \frac{\partial . Sv}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = vv\frac{\partial Q}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + vv\frac{\partial S}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$$
$$+ 4QSvv\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right),$$

quae aeqatio tribus tantum membris principalibus constat, scilicet:

$$4QSvv\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) + \left(vv\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial . Qv}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + \left(vv\frac{\partial S}{\partial y} + \frac{\partial . Sv}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0.$$

§. 12. Cum igitur sit $P = Qv$ et $R = -Sv$, erit $\partial t = Q(v\partial x + \partial y)$ et $\partial u = S(\partial y - v\partial x)$; unde patet quantitates Q et S ita accipi debere, ut hae duae formulae integrationem admittant, id quod a valore v potissimum pendet. Quo igitur a simplicissimis incipiamus, sumamus $v = a$, capique poterit tam $Q = 1$ quam $S = 1$, unde fit $P = a$ et $R = -a$; quibus positis aequatio nostra erit $4aa\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) = 0$, sive $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) = 0$; qua ergo bis integrata habebimus $t = ax + y$ et $u = y - ax$.

§. 13. Ad aequationem inventam $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\,\partial u}\right) = 0$ integrandam statuamus $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = s$, fietque $\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) = 0$, ubi sola t variabilis accipitur, existente u constante, quare integrando

ponamus $s = \Gamma' : u$, existente $\int \partial u \Gamma' : u = \Gamma : u$. Cum igitur sit $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = s = \Gamma' : u$, (ubi jam sola u variabilis sumitur, ita ut t pro constante habeatur), integrando habebimus $z = \Gamma : u + \Delta : t$, consequenter, loco t et u scriptis eorum valoribus, habebimus hujus aequationis: $\left(\frac{\partial \partial z}{\partial x^2}\right) = a\,a\left(\frac{\partial \partial z}{\partial y^2}\right)$ integrale completum $z = \Gamma : (y - a\,x) + \Delta : (y + a\,x)$, prouti quidem jam dudum constat.

§. 14. Tentemus nunc solutionem generaliorem, sumendo $v = \frac{Y}{X}$, existente X functione ipsius x, et Y functione ipsius y, eritque $\partial t = \frac{Q(Y \partial x + X \partial y)}{X}$ et $\partial u = \frac{S(X \partial y - Y \partial y)}{X}$, quae ambae formulae integrabiles redduntur, sumendo $Q = \frac{1}{Y}$ et $S = \frac{1}{Y}$; tum enim fit $t = \int \frac{\partial x}{X} + \int \frac{\partial y}{Y}$ et $u = \int \frac{\partial y}{Y} - \int \frac{\partial x}{X}$; porro vero $P = \frac{1}{X}$ et $R = -\frac{1}{X}$.

§. 15. His ergo positis aequatio nostra hanc induet formam:

$$\frac{4}{X^2}\left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + \left(\frac{X' - Y'}{Y^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - \left(\frac{X' + Y'}{X^2}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0.$$

quae ducta in X^2 reducitur ad hanc:

$$4\left(\frac{\partial \partial z}{\partial t \partial u}\right) + (X' - Y')\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) - (X' + Y')\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$$

de qua aequatione observandum est, eam in genere integrabilem esse non posse, nisi alterutra forma $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ vel $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)$ evanescat. Statuamus igitur $X' - Y' = 0$, id quod tantum duplici modo fieri potest: 1°) scilicet quando vel $X' = 0$ et $Y' = 0$, hoc est quando utraque functio X et Y est constans, ideoque etiam v constans, quem casum modo ante

expedivimus; 2°) vero quando $X' = b$ et $Y' = b$, unde fit $X = bx$ et $Y = by$, hincque $v = \frac{y}{x}$, ideoque aequatio nostra proposita est $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = \frac{yy}{xx}\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right)$, sive

$$xx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) = yy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right),$$

quem ergo casum hic evolvamus.

§. 16. Cum igitur sit $X = bx$ et $Y = by$, erit $t = \frac{1}{b} lxy$ et $u = \frac{1}{b} l\frac{y}{x}$. Porro vero erit $P = \frac{1}{bx}$; $Q = \frac{1}{by}$; $R = -\frac{1}{bx}$; $S = \frac{1}{by}$. Aequatio autem inter t et u erit $2\left(\frac{\partial t\partial u}{\partial\partial z}\right) - b\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$, a cujus ergo integratione tota nostra solutio pendet. Faciamus igitur, ut ante, $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = s$, et aequatio nostra erit: $2\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right) - bs = 0$; ubi sola t est variabilis, ideoque u constans; quo notato erit $2\partial s - bs\partial t = 0$, sive $2.\frac{\partial s}{s} - b\partial t = 0$, cujus integrale est $ls - \frac{1}{2}bt = \text{Const.} = l\Gamma' : u$, et ad numeros transeundo: $se^{-\frac{1}{2}bt} = \Gamma' : u$, ideoque $s = \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = e^{\frac{1}{2}bt}\Gamma' : u$, sive posito $b = 2c$ erit $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = e^{ct}\Gamma' : u$. In hac autem aequatione jam sola u est variabilis, unde fit $\partial z = e^{ct}\partial u\Gamma' : u$, cujus integrale manifesto est $z = e^{ct}\Gamma : u + \Delta : t$.

§. 17. Cum igitur sit $t = \frac{1}{2c} lxy$, ideoque $e^{ct} = \sqrt{xy}$ et $u = \frac{1}{2c} l\frac{y}{x}$, hinc erit $\Gamma : u =$ funct. cuicunque $\frac{y}{x}$, similique modo $\Delta : t =$ funct. cuicunque ipsius xy, consequenter integrale nostrum completum erit $z = \sqrt{xy}\Sigma : \frac{y}{x} + \Theta : xy$; ubi prius membrum multiplicari potest per $\sqrt{\frac{y}{x}}$, quo facto erit $z = y\Sigma : \frac{y}{x} + \Theta : xy$. Ubi observasse juvabit, cum $\Sigma : \frac{y}{x}$ comprehendat omnes functiones nullius dimensionis

ipsarum x et y, prius membrum denotare omnes functiones ipsarum x et y unius dimensionis. Praeter hos autem duos casus modo tractatos haud patet alios exhiberi posse, quibus aequatio in problemate proposita complete integrare liceat.

Problema.

Investigare casus, quibus haec aequatio differentialis secundi gradus: $xx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - fxy\left(\frac{\partial\partial y}{\partial x \partial y}\right) + gyy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$ *ope transformationis hic traditae complete integrari possit.*

Solutio.

§. 18. Loco binarum variabilium x et y, quarum functio est z, introducantur binae aliae t et u, quarum ad illas relatio his aequationibus exprimatur: $\partial t = P\partial x + Q\partial y$ et $\partial u = R\partial x + S\partial y$, atque ex formulis supra datis colligamus primo coëfficientem termini $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right)$, qui est

$$PPxx - fPQxy + gQQyy.$$

Similique modo coëfficiens termini $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right)$ erit

$$RRxx - fRSxy + gSSyy,$$

quos ambos evanescentes reddamus, quod quo commodius fieri queat, statuamus $f = a + b$ et $g = ab$; hocque modo prior coëfficiens resolvitur in hos factores: $(Px - aQy)(Px - bQy)$, qui ut evanescat ponamus $Px = aQy$. Alter vero coëffi-

ciens in hos factores resolvitur: $(Rx - aSy)(Rx - bSy)$, qui ut evanescat faciamus $Rx = bSy$.

§. 19. Cum igitur sit $P = \frac{aQy}{x}$ et $R = \frac{bSy}{x}$, formulae principales pro ∂t et du erunt: $\partial t = Q\left(\frac{ay\partial x + x\partial y}{x}\right)$ et $\partial u = S\left(\frac{by\partial x + x\partial y}{x}\right)$, quae ambae fient integrabiles sumendo $Q = \frac{1}{y}$ et $S = \frac{1}{y}$. Sic enim fiet $\partial t = a.\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}$ et $\partial u = b.\frac{\partial x}{x} + \frac{\partial y}{y}$; unde integralia erunt $t = alx + ly$ et $u = blx + ly$, sive $t = lx^a y$ et $u = lx^b y$. Sumtis autem $Q = \frac{1}{y}$ et $S = \frac{1}{y}$, erit $P = \frac{a}{x}$ et $R = \frac{b}{x}$.

§. 20. His jam valoribus substitutis, quia termini $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t^2}\right)$ et $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial u^2}\right)$ jam ad nihilum sunt perducti, coëfficiens termini $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right)$ reperietur

$$2PRxx - f(QR + PS)xy + 2gQSyy,$$

qui ob $f = a + b$ et $g = ab$, facta substitutione litterarum majuscularum, fit $4ab - (a+b)^2 = -(a-b)^2$, ita ut hic terminus jam sit $-(a-b)^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right)$. Porro vero termini $\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)$ coëfficiens erit $xx\frac{\partial P}{\partial x} - fxy\frac{\partial Q}{\partial x} + gyy\frac{\partial Q}{\partial y}$, qui ob $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{-a}{xx}$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 0$ et $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{-1}{yy}$ abit in hanc formam: $-a(b+1)$. Similique modo coëfficiens termini $\left(\frac{\partial t}{\partial u}\right)$ colligitur fore $xx\left(\frac{\partial R}{\partial x}\right) - fxy\frac{\partial S}{\partial x} + gyy\frac{\partial S}{\partial y} = -b(a+1)$.

§. 21. Aequatio igitur resolvenda nunc hanc induet formam:

$$(a-b)^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right) + a(b+1)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right) + b(a+1)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0,$$

de qua autem ante omnia notari oportet, eam nullo modo adhuc cognito tractari posse, nisi alteruter posteriorum terminorum evanescat. Statuamus igitur $b = -1$; unde fit $f = a - 1$; $g = -a$ et $t = lx^a y$ et $u = l\frac{y}{x}$. Aequatio vero resolvenda erit $(a+1)^2\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right) - (a+1)\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = 0$. Hinc ergo si ponamus $\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = v$, ob $\left(\frac{\partial\partial z}{\partial t\partial u}\right) = \left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)$, erit $(a+1)^2\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = (a+1)v$, sive $(a+1)\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right) = v$, ubi littera u tanquam constans est spectanda, quo observato erit $(a+1)\partial v = v\partial t$, ideoque $\frac{\partial v}{v} = \frac{\partial t}{a+1}$, unde fit $lv = \frac{t}{a+1} + lf:u$, sicque numeris sumtis erit: $v = e^{\frac{t}{a+1}}\Gamma':u$.

§. 22. Cum igitur posuerimus $v = \frac{\partial z}{\partial u}$, ita ut nunc t pro constante sit habenda, erit: $\frac{\partial z}{\partial u} = e^{\frac{t}{a+1}}\Gamma':u$, sive $\partial z = e^{\frac{t}{a+1}}\partial u\,\Gamma':u$, unde ob $\int\partial u\,\Gamma':u = \Gamma:u$ habebimus $z = e^{\frac{t}{a+1}}\Gamma:u + \Delta:t$, quae expressio, ob binas functiones arbitrarias, utique praebet integrale completum aequationis propositae, casu scilicet quo $f = a - 1$ et $g = -a$.

§. 23. Quo nunc hanc formam ad variabiles x et y transferamus, notemus primo esse: $t = lx^a y$, unde fit $e^t = x^a y$, hincque $e^{\frac{t}{a+1}} = x^{\frac{a}{a+1}} y^{\frac{1}{a+1}} = \sqrt[a+1]{x^a y}$; tum vero functio quaecunque ipsius t erit etiam functio quaecunque ipsius $x^a y$, unde pro $\Delta:t$ scribere licebit $\Delta:x^a y$. Deinde cum sit $u = l\frac{y}{x}$, ejus functio quaecunque etiam

erit functio ipsius $\frac{y}{x}$, sicque loco $\Gamma : u$ nunc habebimus $\Gamma : \frac{y}{x}$. Hinc hujus aequationis differentio-differentialis:

$$xx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - (a-1)\,xy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) - ayy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0,$$

integrale completum erit: $z = \sqrt[a+1]{x^a y}\;\Gamma : \frac{y}{x} + \Delta : x^a y$. Quoniam igitur ista aequatio abit in eam quam praecedente problemate invenimus casu $a = 1$, eadem forma integralis prodibit, quam supra (§. 17.) invenimus, scilicet:

$$z = \sqrt{xy}\,\Gamma : \frac{y}{x} + \Delta : xy.$$

§. 24. Prius membrum illius formae integralis multo simplicius exprimi potest, dum scil. ejus factor prior per quandam functionem ipsius $\frac{y}{x}$ multiplicatur vel dividatur. Dividatur ergo per $\sqrt[a+1]{\frac{y}{x}}$, prodibit $z = x\,\Gamma : \frac{y}{x} + \Delta : x^a y$; ubi notandum est prius membrum $x\,\Gamma : \frac{y}{y}$ continere omnes functiones homogeneas unius dimensionis ipsarum x et y. Observetur hic, si etiam fuerit $x = -1$, ita ut aequatio proposita sit $xx\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x^2}\right) - 2xy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial x\,\partial y}\right) + yy\left(\frac{\partial\partial z}{\partial y^2}\right) = 0$, tum integrale completum fore $z = x\,\Gamma : \frac{y}{x} + \Delta : \frac{y}{x}$. Ubi notandum, etiamsi duae functiones ejusdem formae $\frac{y}{x}$ occurrant, eas in unam contrahi non posse, propterea quod prior multiplicata est per x.

SOLUTIO QUAESTIONIS CURIOSAE EX DOCTRINA COMBINATIONUM,

AUCTORE

L. EULERO.

Conventui exhibita die 18 Octobris 1779.

I. Quaestio, quam hic evoluendam suscipio, ita enunciatur: *Data serie quotcunque litterarum* a, b, c, d, e *etc., quarum numerus sit* n, *invenire quot modis earum ordo immutari possit, ut nulla in eo loco reperiatur, quem initio occupaverat.* Hic statim manifestum est, si postrema conditio praetermittatur, atque adeo numerus omnium plane permutationum quaeratur, eum fore productum omnium numerorum ab unitate usque ad n. Hic autem omnes eos ordines excludi oportet, ubi quaepiam littera locum initialem esset habitura, unde numerus permutationum, quem quaerimus, minor erit quam $1. 2. 3. \ldots n$.

II. Ut in solutionem hujus quaestionis inquiramus, consideremus primo casus simplicissimos, ex quibus deinceps methodum colligamus, solutionem pro litterarum numero quantumvis magno derivandi. Ac primo quidem, si unica proponatur littera a, evidens est nullam variationem

locum habere. Propositis duabus litteris *ab*, unica variatio locum habet, scilicet *ba*. Pro tribus autem litteris *abc* duae tantum variationes dari possunt, quae sunt *bca*, *cab*. At si quatuor litterae *abcd* dentur, tres casus hic occurrunt, quibus vel *b*, vel *c*, vel *d* primum obtineat locum; casu igitur, quo *b* in primo loco locatur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quae sunt *adc*, *dac*, *cda*; totidem igitur etiam variationes habebuntur, si tam litterae *c*, quam *d* primus locus tribuatur, sicque omnino novem variationes locum habere possunt, quae sunt:

b a d c	*c a d b*	*d a b c*
b d a c	*c d a b*	*d c a b*
b c d a	*c d b a*	*d c b a*.

III. Evolvamus simili modo casum quinque litterarum *abcde*, ubi primum locum tenere potest vel *b*, vel *c*, vel *d*, vel *e*. Occupet ergo *b* primum locum, secundum autem locum demus litterae *a*, ac tres reliquae *c*, *d* et *e* duas variationes, quae sunt *badec*, *baecd*, admittent. Quando autem ipsi *a* sedes tertia tribuitur, ternae reliquae tres variationes admittunt, quas ita repraesentemus: *bcaed*, *bdaec*, *beacd*. Simili modo si litterae *a* quarta sedes tribuatur, etiam tres variationes locum habent, quae sunt *bedac*, *bcead*, *bdeac*. Denique si litterae *a* quintum locum assignemus, tres variationes erunt sequentes: *bcdea*,

bdeca, *bedca*. Dum igitur litterae *b* primus locus datur, omnino undecim variationes dabuntur; totidem vero etiam occurrent, si vel *c*, vel *d*, vel *e* in primo loco collocetur. Unde concludimus omnino quater undecim sive 44 variationes locum habere pro quinque litteris *abcde*.

IV. Sin autem simili modo ad plures litteras progredi vellemus, enumeratio omnium casuum nimis fieret difficilis et operosa, quin etiam lubrica; unde in methodum certam nobis erit inquirendum, cujus ope numerus variationum semper accurate assignari queat, quantumvis magnus fuerit litterarum numerus. Hunc in finem plurimum juvabit idoneum characterem in subsidium vocare, quo pro quocunque litterarum propositarum numero multitudo omnium variationum indicetur. Denotet igitur iste character $\Pi:n$ numerum omnium variationum, quas n litterae admittunt, et quoniam casus, quibus n est vel 1, vel 2, vel 3, vel 4, vel 5, jam expedivimus, nunc jam novimus fore $\Pi:1=0$; $\Pi:2=1$; $\Pi:3=2$; $\Pi:4=9$ et $\Pi:5=44$; unde patet, ulterius progrediendo, numeros variationum mox in immensum crescere.

V. Hoc jam charactere constituto quaeramus statim in genere numerum omnium variationum pro litterarum numero $=n$, qui ergo erit $\Pi:n$; ubi totum negotium eo redit, ut investigetur quemadmodum iste numerus quaesitus ex praeceden-

8 *

tibus, qui sunt $\Pi:(n-1)$; $\Pi:(n-2)$; $\Pi:(n-3)$ etc. componatur. Ratiocinium vero simili modo instituamus, quo ante sumus usi. Primo scilicet considerabimus casum, quo littera b in primo loco locatur: facile enim intelligitur, quot variationes pro hoc casu prodierint, totidem quoque esse prodituras, si quaecunque alia littera in primo loco constituatur; unde intelligitur, quicunque numerus variationum fuerit inventus, dum littera b primum locum obtinet, eum per $n-1$ multiplicatum praebiturum esse numerum omnium variationum possibilium, ideoque valorem characteris $\Pi:n$.

VI. Hic autem duos casus evolvi convenit, prouti littera a vel secundum locum tenet, vel alium quemcunque. Constituamus igitur a in secundo loco, et investigandum erit, quot variationes reliquae litterae c, d, e, f etc. sint admissurae, quarum numerus cum sit $n-2$, numerus variationum per hypothesin erit $\Pi:(n-2)$. Collocemus porro a in tertium vel alium quemcunque locum, et jam quaestio oritur, quot variationes litterae b, c, d, e, f etc. admittant; ubi notandum est in earum variationibus litteram b non amplius occurrere posse, quia jam primum locum obtinet, sed ejus loco in variationibus ingredi litteram a; sicque perinde erit, ac si, rejecto primo loco, variationes litterarum a, c, d, e, f etc. quaererentur, quarum numerus cum sit $n-1$, multitudo omnium variationum per hypo-

thesin erit $\Pi:(n-1)$, Consequenter, dum littera b in primo loco constituitur, numerus omnium variationum erit $\Pi:(n-2)+\Pi:(n-1)$.

VII. Jam per se manifestum est, totidem quoque variationes esse prodituras, si quaelibet reliquarum litterarum in primo loco scribatur; quare cum omnium harum litterarum, prima a exclusa, numerus sit $n-1$, numerus omnium plane variationum erit $(n-1)\Pi:(n-2)+(n-1)\Pi:(n-1)$, qui ergo est valor formulae quaesitae $\Pi:n$, ita ut sit:

$$\Pi:n=(n-1)\ \Pi:(n-1)+(n-1)\Pi:(n-2),\ \text{sive}$$

$$\Pi:n=(n-1)\ [\Pi:(n-1)+\Pi\,(n-2)].$$

Sicque duorum characterum immediate praecedentium summa, scilicet $\Pi:(n-1)+\Pi:(n-2)$, multiplicata per $n-1$, semper dabit characterem sequentem $\Pi:n$, cujus regulae ope progressio, quam numeri variationum pro singulis litterarum numeris constituunt, quousque lubuerit, facile continuari poterit.

VIII. Quod quo facilius appareat, incipiamus a casibus simplicissimis, atque valores characteris $\Pi:n$ in sequente tabula exhibeamus:

$\Pi:3 = 2(\Pi:2 + \Pi:1) = 2.(1 + 0) = 2$

$\Pi:4 = 3(\Pi:3 + \Pi:2) = 3.(2 + 1) = 9$

$\Pi:5 = 4(\Pi:4 + \Pi:3) = 4.(9 + 2) = 44$

$\Pi:6 = 5(\Pi:5 + \Pi:4) = 5.(44 + 9) = 265$

$\Pi:7 = 6(\Pi:6 + \Pi:5) = 6.(265 + 44) = 1854$

$\Pi:8 = 7(\Pi:7 + \Pi:6) = 7.(1854 + 265) = 14833$

$\Pi:9 = 8(\Pi:8 + \Pi:7) = 8.(14833 + 1854) = 133496$

$\Pi:10 = 9(\Pi:9 + \Pi:8) = 9.(133496 + 14833) = 1334961.$

IX. Ordinemus hos numeros $\Pi:n$, ad suos indices n relatos, in sequentem seriem:

n	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,
$\Pi:n$	0,	1,	2,	9,	44,	265,	1854,	14833,	133496.

Quodsi jam hanc seriem attentius consideremus, egregiam relationem deprehendemus, qua quilibet numerus ad praecedentem refertur, quemadmodum sequens tabella declarat:

$2 = 3 \cdot 1 - 1$

$9 = 4 \cdot 2 + 1$

$44 = 5 \cdot 9 - 1$

$265 = 6 \cdot 44 + 1$

$1854 = 7 \cdot 265 - 1$

$14833 = 8 \cdot 1854 + 1$

$133496 = 9 \cdot 14833 - 1$

etc.

Cujus ergo observationis beneficio nostram progressionem multo facilius continuare licet, dum quilibet terminus semper est certum multiplum praecedentis, unitate vel auctum vel minutum, sicque in genere erit $\Pi : n = n \Pi : (n-1) + 1$. Ubi notetur signum $+$ valere, si n fuerit numerus par, signum vero $-$, quando n fuerit numerus impar.

X. Mirum videbitur, quomodo binae istae leges progressionis inter se cohaereant: facile autem ex lege posteriori prior derivatur. Posito enim $\Pi : n = n \Pi : (n-1) \pm 1$, erit etiam simili modo $\Pi : (n-1) = (n-1) \Pi : (n-2) \mp 1$. Hae duae formulae addantur, ut signa ambigua, $+$ vel $-$, se multo destruant, et summa erit:

$$\Pi : n + \Pi : (n-1) = n \Pi : (n-1) + (n-1) \Pi : (n-2)$$

unde sequitur fore:

$$\Pi : n = (n-1) \Pi : (n-1) + (n-1) \Pi : (n-2),$$

quae est ipsa lex progressionis prior. Verum non tam facile est posteriorem legem ex priore derivare; interim tamen res succedet, si nempe a casibus simplicissimis incipiamus, observando quod $\Pi : 1 = 0$ et $\Pi : 2 = 1$. Hinc enim erit $\Pi : 3 = 2 . \Pi : 2 = 3 . \Pi : 2 - 1$, unde fit $3 \Pi : 2 = \Pi : 3 + 1$. Cum jam sit ex priore lege: $\Pi : 4 = 3 . \Pi : 3 + 3 . \Pi : 2$, si hic loco $3 \Pi : 2$ substituatur valor modo inventus, prodibit $\Pi : 4 = 4 . \Pi : 3 + 1$,

unde fit $4 . \Pi : 3 = \Pi : 4 - 1$. Jam sequens relatio erat: $\Pi : 5 = 4 \Pi : 4 + 4 \Pi : 3$, ubi si loco $4 \Pi : 3$ valor modo inventus scribatur, prodibit: $\Pi : 5 = 5 \Pi : 4 - 1$, ideoque $5 \Pi : 4 = \Pi : 5 + 1$. At sequens relatio est: $\Pi : 6 = 5 . \Pi : 5 + 5 \Pi : 4$, in qua si loco partis postremae valor ante inventus substituatur, erit $\Pi : 6 = 6 \Pi : 5 + 1$, ideoque $6 . \Pi : 5 = \Pi : 6 - 1$, qui valor, in relatione sequente $\Pi : 7 = 6 \Pi : 6 + 6 \Pi : 5$ substitutus, praebet: $\Pi : 7 = 7 \Pi : 6 - 1$, et ita porro; unde satis patet, quomodo lex posterior ex priore derivetur.

DE LA DIVISION D'UN RHOMBOÏDE EN QUATRE PARTIES ÉGALES PAR DEUX LIGNES DROITES QUI SE COUPENT À ANGLES DROITS.

PAR

NICOLAS FUSS.

Présenté à la Conférence le 4 Juillet 1799.

En arrêtant la publication d'un Recueil de Mémoires, choisis parmi ceux de ses *Nova Acta*, et traduits en langue Russe, l'Académie a trouvé bon d'exclure de ce choix tous les mémoires de haute Mathématique qui, n'ayant de l'intérêt que pour les Géomètres de profession, et n'étant en effet qu'à la portée d'un très petit nombre de lecteurs, pourroient nuire au débit de cet ouvrage et détruire par là le principal but que l'Académie a eu vue : celui de répandre parmi le public Russe des connoissances utiles. Considérant cependant que le public instruit renferme un nombre considérable d'amateurs de recherches de Géométrie élémentaire, elle m'avoit permis de remplacer ceux de mes mémoires que des recherches d'un genre trop difficile la forceroit d'exclure de ces traductions, par d'autres sur des sujets plus élémentaires. Conformément à cet arrangement je donnerai de tems en

tems la solution de quelque problème de Géométrie élémentaire, ou d'Algèbre, me reservant toutefois de passer ces bornes étroites et de faire de petites excursions sur le terrein plus vaste de la haute Géométrie, si la partie mathématique du public instruit goûtera l'entreprise utile et patriotique de notre digne Président *).

Je présente donc ici la solution d'un problème que je ne me souviens pas d'avoir vu résolu nullepart. Un problème analogue, relatif à la division du triangle par deux droites qui s'insistent perpendiculairement, résolu autrefois par le celèbre *Jacques Bernoulli*, m'en a suggéré l'idée. Indépendamment de l'intérêt que ce problème peut avoir par les verités de spéculation que sa solution amène, il peut aussi être de quelque utilité dans la pratique de la division des champs, c'est ce qui m'engage à communiquer les trois solutions que j'en ai trouvées, à la suite du problème même que j'énonce ainsi:

Problème.

Diviser un parallélogramme obliquangle, ou rhomboïde, en quatre parties égales par deux lignes droites qui s'insistent perpendiculairement.

---

*) Depuis 1791, ou ce mémoire a été présenté, le nouveau reglement a fait naître des changemens dans l'arrangement dont il est parlé dans cette introduction, et le mémoire, n'ayant point été traduit, paroît ici d'après le manuscrit de l'original.

Première Solution. Tab. I. Fig. 4.

Soit ABCD le parallélogramme donné, EF et GH les deux lignes perpendiculaires entr'elles qui le divisent en quatre parties égales; et parceque toute ligne qui divise un parallélogramme en deux parties égales passe par l'intersection des diagonales, ou par le milieu O de la ligne MN qui joint les milieux M et N des côtés opposés AD et BC, il est clair que les deux lignes cherchées EF et GH doivent se couper dans ce même point O. Soit

$$AB = CD = a$$
$$AD = BC = b$$
$$BE = DF = x$$
$$AG = CH = y$$
$$\angle BAD = \alpha$$
$$\angle MOG = \zeta,$$

et nous aurons:

$$DG = BH = b - y$$
$$AE = CF = a - x$$
$$\angle AEO = 90° - \zeta$$
$$\angle MGO = \alpha - \zeta,$$

et en abaissant de D sur AB la perpendiculaire DP, nous aurons:

$$AP = AD \cos. DAP = b \cos. \alpha$$
$$DP = AD \sin. DAP = b \sin. \alpha.$$

Tout revient donc ici à exprimer l'une ou l'autre des trois inconnues, x, y, ou ζ par les quantités connues a, b et α.

Pour cet effet nous chercherons premièrement la relation entre x et y, ce qui se fera le plus facilement de la manière suivante : Comme il y a par la condition du problème :

$$\lozenge\, OFDG = \lozenge\, AEOG$$

ôtons $\triangle\, OFG = \triangle\, OEG$

il reste $\triangle\, FDG = \triangle\, EAG$.

Or nous savons que

$$\triangle\, FDG = \tfrac{1}{2} DF \,.\, DG \sin. D$$
$$\triangle\, EAG = \tfrac{1}{2} AE \,.\, AG \sin. A$$

d'où, à cause de $\sin. D = \sin. A$, on tire

$$DF \,.\, DG = AE \,.\, AG$$

c'est-à-dire $x\,(b - y) = y\,(a - x)$, équation qui donne $y = \frac{bx}{a}$.

Aprésent cherchons x par ζ. Pour cet effet abaissons de F sur AB la perpendiculaire FL, et à cause de

$$DF = PL = AE - AP - LE$$

sachant que

$$LE = LF \text{ tag. } EFL = b \sin. \alpha \text{ tag. } \zeta,$$

nous aurons cette équation :

$$x = a - x - b \cos. \alpha - b \sin. \alpha \text{ tag. } \zeta.$$

qui nous donne $x = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}b \cos. \alpha - \frac{1}{2}b \sin. \alpha \text{ tag. } \zeta$, expression qui se laisse reduire à celle-ci :

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}b \cos. (\alpha - \zeta)}{\cos. \zeta}.$$

De la même manière cherchons aussi y par ζ, ce que l'on effectue le plus commodément en cherchant GM par le triangle GOM, qui donne :

$$GM : MO = \sin. GOM : \sin. MGO,$$

proportion qui nous fournit $GM = \frac{MO . \sin. GOM}{\sin. MGO} = \frac{\frac{1}{2}a \sin. \zeta}{\sin. (\alpha - \zeta)}$, desorte que

$$y = AM - GM = \frac{1}{2}b - \frac{\frac{1}{2}a \sin. \zeta}{\sin. (\alpha - \zeta)}.$$

Mais comme nous avons trouvé que $y = \frac{bx}{a}$, en mettant cette valeur à la place de y, la dernière équation nous donne

$$x = \frac{1}{2}a - \frac{\frac{1}{2}aa \sin. \zeta}{b \sin. (\alpha - \zeta)}$$

et en comparant cette valeur de x avec la première, il en résulte cette équation qui ne renferme plus que la seule inconnue ζ :

$$\frac{b \cos. (\alpha - \zeta)}{\cos. \zeta} = \frac{aa \sin. \zeta}{b \sin. (\alpha - \zeta)}.$$

Faisant disparoître les dénominateurs, on a

$$bb \sin. (\alpha - \zeta) \cos. (\alpha - \zeta = aa \sin. \zeta \cos. \zeta$$

ce qui se réduit à $bb \sin. (2\alpha - 2\zeta) = aa \sin. 2\zeta$. Developpons, pour avoir

$$bb \sin. 2\alpha \cos. 2\zeta - bb \cos. 2\alpha \sin. 2\zeta = aa \sin. 2\zeta$$

et en divisant cette équation par $\cos. 2\zeta$, elle devient

$$bb \sin. 2\alpha - bb \cos. 2\alpha \,\text{tag.}\, 2\zeta = aa \,\text{tag.}\, 2\zeta$$

d'où lon tître

$$\text{tag.}\, 2\zeta = \frac{bb \sin. 2\alpha}{aa + bb \cos. 2\alpha}.$$

L'angle ζ étant déterminé de cette manière moyennant les données a, b, α, on connoîtra aussi x et y. Les points G et F seront donc connus et le problème résolu.

Seconde Solution.

Tab. I. Soit derechef donné le parallélogramme ABCD, dans
Fig. 5. lequel $AB = a$; $AD = b$ et l'angle $BAD = \alpha$. Par O, l'intersection des diagonales, menons $MN \# AB$, $IK \# AD$, et si EF et GH sont les lignes que nous cherchons, il est clair que

$$\square MOKD = \tfrac{1}{4} \square ABCD$$
$$\lozenge\, GOFD = \tfrac{1}{4} \square ABCD$$

d'où il suit que

$$\lozenge\, GOFD = \square MOKD.$$

Or $\lozenge\, GOFD = \square MOKD + \triangle GOM - \triangle FOK$,

d'où il suit que $\triangle GOM = \triangle FOK$, et par conséquent, en tirant $M\beta \# EF$ et $K\alpha \# GH$, nous aurons

$$OG \,.\, M\beta = OF \,.\, K\alpha.$$

Or comme $\triangle MO\beta \sim \triangle FK\alpha$

$$\triangle MG\beta \sim \triangle OK\alpha$$

en supposant $M\beta = m \,.\, F\alpha$

$$K\alpha = n \,.\, G\beta$$

nous aurons $O\beta = m \cdot K\alpha$

$O\alpha = n \cdot M\beta$

et à cause de $(O\beta + G\beta) M\beta = (O\alpha + F\alpha) K\alpha$, il faudra que $(m \cdot K\alpha + \frac{K\alpha}{n}) M\beta = (n \cdot M\beta + \frac{M\beta}{m}) K\alpha$, condition qui se reduit à $\frac{mn+1}{n} = \frac{mn+1}{m}$, ou à $m = n$, donc $O\beta = n \cdot K\alpha$ et $O\alpha = n \cdot M\beta$, ou bien $O\alpha \cdot K\alpha = O\beta \cdot M\beta$. Or en nommant $\angle MOG = \zeta$, on a $MGO = \alpha - \zeta$, puis

$$O\alpha = OK \sin. OK\alpha = \tfrac{1}{2} b \sin. (\alpha - \zeta)$$
$$K\alpha = OK \cos. OK\alpha = \tfrac{1}{2} b \cos. (\alpha - \zeta)$$
$$O\beta = OM \cos. MO\beta = \tfrac{1}{2} a \cos. \zeta$$
$$M\beta = OM \sin. MO\beta = \tfrac{1}{2} a \sin. \zeta$$

ce qui étant substitué on aura,

$$\tfrac{1}{4} bb \sin. (\alpha - \zeta) \cos. (\alpha - \zeta) = \tfrac{1}{4} aa \sin. \zeta \cos. \zeta$$

même équation que nous a donné la solution précédente, et dont le dévéloppement nous a fourni la valeur $\text{tag. } 2\zeta = \frac{bb \sin. 2\alpha}{aa + bb \cos. 2\alpha}$.

Troisième Solution.

Soit ABCD le parallélogramme donné. De D abaissez sur AB la perpendiculaire DP. Sur AP faites un parallélogramme APQR, dont la hauteur PQ = 2 DP. Portez AP de A en S, et sur BS, comme diamètre, décrivez la demicercle BTS. Portez DP de S en T, et sur BT construisez le quarré BTUV. Prolongez TB et fai- Tab. I. Fig. 6.

tes TY = PQ. Menez UY, et BW parallèle à UY. Portez TW de A en Z sur le prolongement de BA. Tirez ZS et divisez l'angle AZS en deux angles égaux par la droite $Z\Omega$. Par O, intersection des diagonales du parallélogramme ABCD, tirez GH parallèle a $Z\Omega$ et EF perpendiculaire à GH, la division sera faite.

Démonstration.

Soit $\angle MOG = \angle AZ\Omega = \zeta$, de sorte que $AZS = 2\zeta$, et nous aurons $\text{tag.}\, AZS = \text{tag.}\, 2\zeta = \frac{AS}{AZ} = \frac{AP}{TW}$. Or par la construction il est clair que $\frac{AP}{TW} = \frac{\square APQR}{\square TWXY}$ et partant, à cause de $WT : BT = UT : YT$, c'est-à-dire

$$\square TWXY = \square BTUV,$$

nous aurons $\text{tag.}\, 2\zeta = \frac{\square APQR}{\square BTUV} = \frac{AP.PQ}{BT^2}$. Mais comme

$$BT^2 = BS^2 - ST^2 = AB^2 + AS^2 - ST^2$$

cette valeur devient $\text{tag.}\, 2\zeta = \frac{AP.PQ}{AB^2 + AP^2 - DP^2}$, c'est-à-dire $\text{tag.}\, 2\zeta = \frac{b\cos.\alpha \,.\, 2b\sin.\alpha}{aa + bb\cos.\alpha^2 - bb\sin.\alpha^2}$ ou bien, à cause de $\cos.\alpha^2 - \sin.\alpha^2 = \cos.2\alpha$, on aura

$$\text{tag.}\, 2\zeta = \frac{bb\sin.2\alpha}{aa + bb\cos.2\alpha}.$$

Ici nous pourrions régarder notre démonstration comme finie, ayant fait voir que l'angle ζ de notre construction est le même que nous ont donné les deux solutions précédentes. Achevons cependant, en démontrant que les lignes GH et EF ainsi construites divisent effectivement le parallélogramme en quatre parties égales.

Pour cet effet ayant trouvé que

$$\text{tag. } 2\zeta = \frac{\sin. 2\zeta}{\cos. 2\zeta} = \frac{bb \sin. 2\alpha}{aa + bb \cos. 2\alpha},$$

si nous faisons disparoître les dénominateurs, nous aurons

$$aa \sin. 2\zeta = bb \sin. 2\alpha \cos. 2\zeta - bb \cos. 2\alpha \sin. 2\zeta,$$

ou bien $aa \sin. 2\zeta = bb \sin. 2(\alpha - \zeta)$, ou bien aussi

$$a \sin. \zeta \,.\, a \cos. \zeta = b \sin. (\alpha - \zeta) \,.\, b \cos. (\alpha - \zeta)$$

et en réstituant les lignes, après avoir tiré IK par O, et # AD, puis $K\alpha$ # GH et $M\beta$ # EF, nous aurons :

$$M\beta \,.\, O\beta = K\alpha \,.\, O\alpha$$

c'est-à-dire $M\beta : K\alpha = O\alpha : O\beta = \frac{1}{O\beta} : \frac{1}{O\alpha}$.

Multiplions le dernier rapport par $O\alpha \,.\, O\beta + M\beta \,.\, K\alpha$, et la proportion sera

$$M\beta : K\alpha = \frac{O\alpha \,.\, O\beta + M\beta \,.\, K\alpha}{O\beta} : \frac{O\alpha \,.\, O\beta + M\beta \,.\, K\alpha}{O\alpha},$$

ou bien aussi

$$M\beta : K\alpha = O\alpha + \frac{M\beta \,.\, K\alpha}{O\beta} : O\beta + \frac{M\beta \,.\, K\alpha}{O\alpha}.$$

Or comme $\Delta\, MG\beta \sim \Delta\, OK\alpha$

$\Delta\, MO\beta \sim \Delta\, FK\alpha$,

nous aurons $O\alpha : M\beta = K\alpha : G\beta$

$O\beta : M\beta = K\alpha : F\alpha$,

c'est-à-dire $\frac{M\beta \,.\, K\alpha}{O\alpha} = G\beta$

$\frac{M\beta \,.\, K\alpha}{O\beta} = F\alpha$

par conséquent la proportion sera

$$M\beta : K\alpha = O\alpha + F\alpha : O\beta + G\beta,$$

d'où il suit que

$$M\beta \,.\, OG = K\alpha \,.\, OF$$

ou bien que $\triangle GOM = \triangle FOK = \triangle HON$,

et partant aussi $\triangle HON = \triangle EOI = \triangle FOK$.

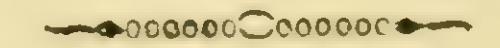
Il y aura donc

$$\lozenge DFOG = \square DMOK + \triangle GOM - \triangle FOK = \tfrac{1}{4} ABCD$$

$$\lozenge AEOG = \square AIOM + \triangle EOI - \triangle GOM = \tfrac{1}{4} ABCD$$

$$\lozenge BEOH = \lozenge DFOG = \tfrac{1}{4} ABCD$$

$$\lozenge CFOH = \lozenge AEOG = \tfrac{1}{4} ABCD.$$



ÉCLAIRCISSEMENS SUR L'INTÉGRATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE:

$$y \partial y + P y \partial x + Q \partial x = 0$$

P ET Q ÉTANT DES FONCTIONS DE X.

PAR

NICOLAS FUSS.

Présentés à la Conférence le 9 Mars 1803.

L'équation différentielle que le titre de ce mémoire annonce a été traitée par feu Mr. *Euler*, dans le premier volume de son Calcul intégral, où l'on trouve déterminées, au problème 67me, les fonctions P et Q de x, qui rendent l'équation proposée intégrable, moyennant un multiplicateur d'une forme donnée; mais l'auteur s'étoit borné à déterminer ces fonctions, sans indiquer l'intégrale même. Cependant l'intégration, si l'on veut la faire selon la regle générale du §. 458., loin d'être aussi aisée que le silence de l'auteur pourroit faire présumer, présente encore assez de difficultés, et j'ai été consulté plus d'une fois sur cette matière, par des jeunes Géomètres qui s'étoient vus arrètés, dans l'étude de l'ouvrage classique mentionné,

par la difficulté d'achever l'intégration de l'équation, après avoir trouvé le multiplicatur qui la rend intégrable. Dans mes réponses je leur avois indiqué tantôt une route qui mène directement à l'intégrale de l'équation ainsi multipliée; tantôt des voyes indirectes, menant à l'intégrale de l'équation proposée même, par sa transformation en une autre, dont l'intégrale est assignable et connue; tantôt enfin des substitutions qui, au lieu de l'équation proposée, en amènent une autre dont les variables admettent la séparation. Il en est résulté une suite d'éclaircissemens, dont j'ai cru pouvoir présenter les plus intéressantes à l'Académie, comme une espèce de supplément au troisième chapitre de la seconde section du Calcul intégral. Quant à l'intégration par des multiplicateurs, je me suis attaché à ceux qui ont donné naissance à ces éclaircissemens, et que feu Mr. *Euler* a examinés aux §. 517 et 522. Dans les deux problèmes suivans, je ferai voir, en reprenant la question dès son commencement, comment achever cette intégration, préparée par la recherche des multiplicateurs.

Problème I.

Déterminer les fonctions P, Q, R, S *de* x, *qui rendent intégrable l'équation* $y\partial y + Py\partial x + Q\partial x = o$,

moyennant le multiplicateur $M = (yy + Ry + S)^n$, *et trouver l'intégrale de l'équation multipliée.*

Solution.

L'équation multipliée

$$My\partial y + M(Py + Q)\partial x = 0$$

devenant intégrable, lorsque

$$\left(\frac{\partial \, . \, My}{\partial x}\right) = \partial \, . \left(\frac{M(Py + Q)}{\partial y}\right)$$

(*Inst. Calc. Integr. Tom.* I. §. 443.), ou bien lorsque

$$(y\left(\frac{\partial M}{\partial x}\right) = MP + (Py + Q)\left(\frac{\partial M}{\partial y}\right),$$

en divisant par M nous aurons cette équation de condition:

$$y\left(\frac{\partial \, . \, lM}{\partial x}\right) = P + (Py + Q)\left(\frac{\partial \, . \, lM}{\partial y}\right).$$

Or comme $lM = nl(yy + Ry + S)$, on a

$$\left(\frac{\partial \, . \, lM}{\partial y}\right) = \frac{n(2y + R)}{yy + Ry + S};$$

$$\left(\frac{\partial \, . \, lM}{\partial x}\right) = \frac{n(R'y + S')}{yy + Ry + S};$$

en mettant $\frac{\partial R}{\partial x} = R'$ et $\frac{\partial S}{\partial x} = S'$. En substituant ces valeurs l'équation de condition prendra cette forme:

$$ny(R'y + S') = (2n + 1)Pyy + (2nQ + (n + 1)PR)y + PS + nQR$$

qui nous fait voir que

$$1°)\quad nR' = (2n + 1)P$$

$$2°)\quad nS' = 2nQ + (n + 1)PR$$

$$3°)\quad PS + nQR = 0.$$

Des deux premières équations on tire:

$$P = \frac{nR'}{2n + 1} = \frac{n\partial R}{(2n + 1)\partial x}$$

$$Q = \frac{1}{2}S' - \frac{n + 1}{2n}PR = \frac{\partial S}{2\partial x} - \frac{n + 1}{2(2n + 1)} \cdot \frac{R\partial R}{\partial x}$$

et ces valeurs, substituées dans la troisième, nous la présentent sous cette forme :

$$\partial S + \frac{2 S \partial R}{(2n+1) R} = \frac{n+1}{2n+1} R \partial R,$$

qui multipliée par $R^{\frac{2}{2n+1}}$ devient intégrable, l'intégrale étant:

$$R^{\frac{2}{2n+1}} S = C + \tfrac{1}{4} R^{\frac{4n+4}{2n+1}}.$$

Les trois fonctions cherchées de x, savoir S, P, Q, seront donc déterminées par la quatrième fonction R de la manière suivante :

$$S = C R^{\frac{-2}{2n+1}} + \tfrac{1}{4} RR$$

$$P \partial x = \frac{n \partial R}{2n+1}$$

$$Q \partial x = -\frac{R \partial R}{4(2n+1)} - \frac{C R^{\frac{-2n-3}{2n+1}} \partial R}{2n+1}.$$

L'équation proposée aura donc cette forme :

$$(2n+1) y \partial y + (ny - \tfrac{1}{4} R - C R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}) \partial R = 0,$$

et deviendra intégrable par le multiplicateur :

$$M = (yy + Ry + \tfrac{1}{4} RR + C R^{\frac{-2}{2n+1}})^n.$$

Soit son intégrale $= W$, et le multiplicateur $M = V^n$, de sorte que

$$\text{I. } \partial W = V^n \left(y \partial y + \frac{n y \partial R}{2n+1} - \frac{R \partial R}{4(2n+1)} - \frac{C R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}}{2n+1} \partial R\right)$$

et comme la différentielle est

$$\partial V = 2(y\partial y + \frac{R\partial y + y\partial R}{2} + \tfrac{1}{4}R\partial R - \frac{C}{2n+1}R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\partial R)$$

nous aurons

$$\text{II. } \tfrac{1}{2}V^n\partial V = V^n(y\partial y + \frac{R\partial y + y\partial R}{2} + \tfrac{1}{4}R\partial R - \frac{C}{2n+1}R^{\frac{-2n-3}{2n+1}}\partial R).$$

De là nous déduisons 2 (II — I)

$$= \frac{\partial\,.\,V^{n+1}}{n+1}\,2\,\partial W = V^n R\,(\partial y + \frac{y\partial R}{(2n+1)R} + \frac{(n+1)\partial R}{2n+1}),$$

ce qui pourra être représenté ainsi :

$$\frac{1}{V^n\,.\,R^{\frac{2n}{2n+1}}}\,\partial\,.\,[\frac{V^{n+1}}{n+1} - 2\,W] = \partial\,.\,R^{\frac{1}{2n+1}}(y + \tfrac{1}{2}R).$$

Soit, pour simplifier, $R^{\frac{1}{2n+1}}(y + \tfrac{1}{2}R) = z$, et nous aurons:

$$\partial\,.\,R^{\frac{1}{2n+1}}(y + \tfrac{1}{2}R) = \partial z \text{ et}$$

$$C + zz = R^{\frac{2}{2n+1}}[yy + Ry + \tfrac{1}{4}RR + CR^{\frac{-2}{2n+1}}]$$

de sorte que $C + zz = R^{\frac{2}{2n+1}}\,.\,V$

par conséquent $V^n\,.\,R^{\frac{2n}{2n+1}} = (C + zz)^n$.

Nous voilà donc parvenus à cette équation extrémement simplifiée :

$$\partial\,.\,[\frac{V^{n+1}}{n+1} - 2\,W] = (C + zz)^n\,\partial z$$

qui nous donne enfin l'intégrale cherchée :

$$W = \frac{V^{n+1}}{2(n+1)} - \tfrac{1}{2}\int(C + zz)^n\,\partial z.$$

Prbblème 2.

Déterminer les fonctions P, Q, R, S, *de* x, *qui rendent intégrable l'équation* $y\partial y + Py\partial x + Q\partial x = 0$, *moyennant le multiplicateur* $M = (y+R)^m (y+S)^n$, *et trouver l'intégrale de l'équation multipliée.*

Solution.

La condition pour l'intégrabilité de l'équation multipliée étant :

$$y\left(\frac{\partial . lM}{\partial x}\right) = P + (Py + Q)\left(\frac{\partial . lM}{\partial y}\right),$$

à cause de $lM = ml(y+R) + nl(y+S)$ nous aurons, (en mettant $\frac{\partial R}{\partial x} = R'$ et $\frac{\partial S}{\partial x} = S'$) :

$$\left(\frac{\partial . lM}{\partial x}\right) = \frac{mR'}{y+R} + \frac{nS'}{y+S};$$
$$\left(\frac{\partial . lM}{\partial y}\right) = \frac{m}{y+R} + \frac{n}{y+S},$$

ce qui étant substitué, l'équation de condition développée et ordonnée deviendra :

$$\left\{\begin{array}{l} +(mR'+nS')yy \\ +(mR'S+nS'R)y \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} (m+n+1)Pyy \\ +[P((m+1)S+(n+1)R)+(m+n)Q]y \\ +PRS+Q(mS+nR) \end{array}\right\}$$

d'où l'on déduit les conditions suivantes :

1°) $(m+n+1)P = mR' + nS'$

2°) $[(m+1)S+(n+1)R]P + (m+n)Q = mR'S + nS'R$

3°) $PRS + Q(mS+nR) = 0$,

dont les deux premières nous fournissent :

$$P\,\partial x = \frac{m\,\partial R + n\,\partial S}{m+n+1};$$

$$Q\,\partial x = \frac{mn\,(S\,\partial R + R\,\partial S) - m\,(n+1)\,R\,\partial R - n\,(m+1)\,S\,\partial S}{(m+n)\,(m+n+1)};$$

ce qui étant substitué dans la troisième lui fait prendre cette forme :

$$\left\{\begin{array}{l} +(n-m+1)\,SR\,\partial R + mSS\,\partial R - m+1)\,SS\,\partial S \\ +(m-n+1)\,RS\,\partial S + nRR\,\partial S - n+1)\,RR\,\partial R \end{array}\right\} = 0$$

à laquelle satisfait la valeur $R = S$, et qui par conséquent est divisible par $R - S$ et devient après la division :

$$[mS + (n+1)\,R]\,\partial R - [nR + (m+1)\,S]\,\partial S = 0,$$

équation homogène qui, divisée, d'après la règle (Calc. Integr. Tom. I. §. 477.) par

$$(n+1)\,R^2 + (m-n)\,RS - (m+1)\,S^2,$$

c'est-à-dire par $(R - S)\,((n+1)\,R + (m+1)\,S)$, devient intégrable, car il en résulte l'équation :

$$(m+n+1)\,.\,\frac{\partial R - \partial S}{R - S} + \frac{(n+1)\,\partial R + (m+1)\,\partial S}{(n+1)\,R + (m+1)\,S} = 0$$

dont l'intégrale est

$$(R - S)^{m+n+1}\,[(n+1)\,R + (m+1)\,S] = C$$

et par là la relation entre R et S est déterminée. Car soit $R = s + u$ et $m + n + 1 = \lambda$, et en changeant la constante arbitraire, on obtiendra

$$S = \frac{a}{u^{\lambda}} - \frac{(n+1)\,u}{\lambda+1};$$

$$R = \frac{a}{u^{\lambda}} + \frac{(m+1)\,u}{\lambda+1},$$

et ces valeurs étant substituées, on aura

$$P\partial x = \frac{(m-n)\partial u}{\lambda+1} - \frac{(\lambda-1)a\partial u}{u^{\lambda+1}};$$

$$Q\partial x = \frac{\partial u}{u}\left[\frac{a}{u^{\lambda}} - \frac{(n+1)u}{\lambda+1}\right] \cdot \left[\frac{a}{u^{\lambda}} + \frac{(m+1)u}{\lambda+1}\right].$$

Ainsi les quatre fonctions P, Q, R, S, sont toutes déterminées par la même nouvelle variable u.

Pour simplifier encore d'avantage les formules nous mettrons $\frac{m+1}{\lambda+1} = \mu$, $\frac{n+1}{\lambda+1} = \nu$ et $y = z - \frac{a}{u^{\lambda}}$, et nous aurons pour les fonctions P, Q, R, S, les valeurs suivantes:

$$S = \frac{a}{u^{\lambda}} - \nu u;$$

$$R = \frac{a}{u^{\lambda}} + \mu u;$$

$$P\partial x = \frac{(m-n)\partial u}{\lambda+1} - \frac{(\lambda-1)a\partial u}{u^{\lambda+1}};$$

$$Q\partial x = \frac{\partial u}{u}\left(\frac{a}{u^{\lambda}} - \nu u\right)\left(\frac{a}{u^{\lambda}} + \mu u\right);$$

l'équation proposée sera

$$z\partial z - \frac{a\partial z}{u^{\lambda}} + \frac{az\partial u}{u^{\lambda+1}} + \frac{(m-n)z\partial u}{\lambda+1} - \mu\nu u\partial u = 0$$

et le multiplicateur qui la rend intégrable

$$M = (z+\mu u)^m (z-\nu u)^n.$$

Soit l'intégrale cherchée de l'équation ainsi multipliée $= W$, et nous aurons:

$$\text{I.}\quad \frac{\partial W}{M} = z\partial z - \frac{a\partial z}{u^{\lambda}} + \frac{az\partial u}{u^{\lambda+1}} + \frac{(m-n)z\partial u}{\lambda+1} - \mu\nu u\partial u.$$

Soit $N = (z+\mu u)^{m+1}(z-\nu u)^{n+1}$, et nous aurons

$$\text{II.}\quad \frac{\partial N}{(\lambda+1)M} = z\partial z + \frac{(m-n)z\partial u}{\lambda+1} - \mu\nu u\partial u$$

et de là nous déduisons

$$\text{II} - \text{I} = \frac{1}{M}\left(\frac{\partial N}{\lambda+1} - \partial W\right) = \frac{a\partial z}{u^{\lambda}} - \frac{az\partial u}{u^{\lambda+1}}$$

ce qui nous donne

$$\frac{\partial N}{\lambda+1} - \partial W = \frac{a M z}{u^\lambda}\left(\frac{\partial z}{z} - \frac{\partial u}{u}\right)$$

ou bien, en remettant à la place de M sa valeur :

$$\frac{\partial N}{\lambda+1} - \partial W = \frac{a z}{u^\lambda}\left(\frac{\partial z}{z} - \frac{\partial u}{u}\right)(z + \mu u)^m (z - \nu u)^n.$$

Mettons $z = t u$, pour avoir $\frac{\partial z}{z} - \frac{\partial u}{u} = \frac{\partial t}{t}$, et cette dernière équation deviendra

$$\frac{\partial N}{\lambda+1} - \partial W = a\partial t\,(t+\mu)^m\,(t-\nu)^n$$

de sorte que l'intégrale cherchée sera

$$W = \frac{N}{\lambda+1} - a\int\partial t\,(t+\mu)^m\,(t-\nu)^n.$$

Scholie 1.

Les transfotmations que nous avons fait subir à notre équation proposée, par une suite de substitutions choisies convenablement au but que nous avions en vue, nous ont non seulement mis en état d'atteindre ce but et de trouver l'intégrale de cette équation, moyennant le multiplicateur de la forme préscrite; mais elles nous procurent encore un autre avantage: celui d'intégrer immédiatement, sans recourir au multiplicateur, l'équation même, en la reduisant à la forme :

$$\partial y + P y \partial x - Q \partial x = 0,$$

dont l'intégrale déjà toute trouvée, au moyen de la séparation des variables, est

$$y = e^{-\int P\partial x}\int e^{P\partial x}\,Q\partial x$$

(Calc. Integr. Tom. I. §. 420.). Car notre équation ayant été mise sous cette forme:

$$z\partial z - \frac{a\partial z}{u^{\lambda}} + \frac{az\partial u}{u^{\lambda+1}} + \frac{(m-n)z\partial u}{\lambda+1} - \mu\nu u\partial u = 0,$$

après y avoir mis $z = tu$ elle devient:

$$uut\partial t + ttu\partial u - \frac{a\partial t}{u^{\lambda-1}} + \frac{(m-n)tu\partial u}{\lambda+1} - \mu\nu u\partial u = 0$$

et peut être représentée sous cette forme:

$$uut\partial t - \frac{a\partial t}{u^{\lambda-1}} + u\partial u(t+\mu)(t-\nu) = 0$$

ou bien, en mettant $u^{\lambda+1} = s$, sous celle-ci:

$$st\partial t - a\partial t + \frac{\partial s}{\lambda+1}t + \mu)(t-\nu) = 0.$$

En comparant l'équation équivalente:

$$\partial s + \frac{(\lambda+1)(st-a)\partial t}{(t+\mu)(t-\nu)} = 0$$

avec l'équation mentionnée, on voit que l'intégrale sera:

$$s = e^{-\int \Pi\partial t}\int e^{\int \pi\partial t}\Theta\partial t$$

en prenant les valeurs

$$\Pi = \frac{(\lambda+1)t}{(t+\mu)(t-\nu)};$$

$$\Theta = \frac{(\lambda+1)a}{(t+\mu)(t-\nu)};$$

et comme la première nous donne:

$$\Pi\partial t = \frac{\lambda+1}{\mu+\nu}\left[\frac{t\partial t}{t-\nu} - \frac{t\partial t}{t+\mu}\right]$$

il s'en suit que

$$\int \Pi\partial t = l(t-\nu)^{n+1}(t+\mu)^{m+1};$$

$$e^{-\int \Pi\partial t} = \frac{1}{(t+\mu)^{m+1}(t-\nu)^{n+1}}$$

et l'integrale cherchée sera:

$$s = \frac{(\lambda+1)a}{(t+\mu)^{m+1}(t-\nu)^{n+1}}\int (t+\mu)^{m}(t-\nu)^{n}\partial t.$$

Scholie 2.

Ainsi après avoir transformé l'équation proposée $y\partial y + Py\partial x + Q\partial x = 0$ en une autre qui, multipliée par $(y + R)^m (y + S)^n$, devient intégrable, ayant déterminé les fonctions P, Q, R, S de manière qu'elles satisfassent à la condition qui est le critère de l'intégrabilité : il s'est trouvé que cette transformée est aussi intégrable sans le multiplicateur, à l'aide d'une formule intégrale déduite de la condition qu'exigeoit la séparation des variables. Voyons àprésent si nous ne pourrons pas trouver pour P et Q des fonctions telles de x, que l'équation devienne intégrable au moyen d'une séparation effective des variables introduites par les substitutions que nous serons dans le cas de faire.

Problème 3.

Trouver pour P *et* Q *de telles fonctions de* x, *que l'équation proposée ci-dessus* $y\partial y + Py\partial x + Q\partial x = 0$ *devienne intégrable par la séparation des variables.*

Solution.

Soit $\partial y = p\partial x$ et notre équation deviendra

$$py + Py + Q = 0$$

d'où nous tirons $y = -\frac{Q}{p + P}$ et $\partial y = p\partial x = -\partial \cdot \frac{Q}{p + P}$.

Soit $p + P = q$ et nous aurons

$$p\,\partial x + P\,\partial x = q\,\partial x$$

et partant

$$q\,\partial x - P\,\partial x = p\,\partial x = -\partial . \frac{Q}{q}$$

c'est-à-dire

$$q\,\partial x - P\,\partial x = \frac{Q\partial q - q\partial Q}{qq}.$$

Mettons $\partial Q = Q'\partial x$ et cette équation sera

$$\partial x\,(q^3 - P\,q\,q + Q'q) = Q\,\partial\,q.$$

Soit enfin $q = s + \Sigma$, et elle devient

$$\partial x \left\{ \begin{array}{r} s^3 + 3\Sigma s^2 + 3\Sigma^2 s + \Sigma^3 \\ - P s^2 - 2P\Sigma s - P\Sigma^2 \\ + Q's + Q'\Sigma \\ - Q\Sigma' \end{array} \right\} = Q\,\partial\,s$$

qui sera séparable, lorsque les coëfficiens de s^2, s et s^0 seront des quantités constantes, ce qu'on pourra effectuer de plus d'une manière. En voilà une des plus simples: Mettons $\Sigma = nx$, et comme il faut que

$$3\Sigma - P = a;$$
$$3\Sigma^2 - 2P\Sigma + Q' = b;$$
$$\Sigma^3 - P\Sigma^2 + Q'\Sigma - Q\Sigma' = nc,$$

a, b, c, n, étant des quantités constantes quelconques et $\Sigma' = \frac{\partial\Sigma}{\partial x} = n$, nous aurons

$$P = 3nx - a;$$
$$Q' = 3nnxx - 2nax + b;$$
$$Q = n^2x^3 - naxx + bx - c;$$

Ainsi les fonctions P et Q sont déterminées de façon que l'équation entre s et x est séparée, savoir:

$$\frac{\partial s}{s^3 + as^2 + bs + c} = \frac{\partial x}{n^2x^3 - nax^2 + bx - c}$$

au moyen de laquelle s sera déterminée par x, et même généralement, pour le cas présent, en y ajoutant une constante après l'intégration; ensuite, à cause de

$$x = -\frac{Q}{q} = \frac{c - bx + nax^2 - n^2x^3}{s + nx}$$

aussi y sera déterminé par x, et partant l'équation différentielle:

$$y\partial y + (3nx - a)y\partial x + (n^2x^3 - nax^2 + bx - c)\partial x = 0$$

sera résolue

Scholie

En mettant $n = 1$, cette équation devient

$$y\partial y + (3x - a)y\partial x + (x^3 - ax^2 + bx - c)\partial x = 0$$

et c'est la même que feu Mr. *Euler* a résolu autrefois dans le Tome XVII. des nouveaux Commentaires, pag. 107. au moyen d'une équation différentielle du troisième degré dont l'intégrale est connue. La manière de déduire l'équation proposée de celle du troisième degré, employée par feu Mr. *Euler*, est à la fois ingénieuse et commode, mais comme la transformation se fait par une substitution

exponentielle dont ni l'une ni l'autre équation donne l'indication, quoique d'ailleurs elle soit simple et naturelle, on me permettra de placer ici la transformation suivante, différente de celle du mémoire cité, avec l'intégration qui en découle. Considérons l'équation du troisième degré:

$$\partial^3 z + f\partial t\partial\partial z + g\partial t^2\partial z + hz\partial t^3 = 0$$

dont l'intégrale complette est:

$$z = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + C e^{\gamma t}$$

α, β, γ, étant les racines de l'équation algèbrique du troisième degré:

$$s^3 + f s^2 + g s + h = 0$$

(V. Calc. Integr. Tom. II. §. 1117.). Soit

$$\partial z = p\partial t \text{ et } \partial p = q\partial t$$

et on aura

$$\partial\partial z = \partial p\partial t = p\partial t^2 \text{ et } d^3 z = \partial q\partial t^2$$

en supposant ∂t constant. Ces valeurs étant substituées, l'équation du troisième degré se trouvera transformée en une équation du premier degré, savoir

$$\partial q + f\partial p + gp\partial t + hz\partial t = 0.$$

Mais comme $\partial t = \frac{\partial z}{p} = \frac{\partial p}{q}$, il y a $q = \frac{p\partial p}{\partial z}$ et $\partial q = \frac{p\partial\partial p + \partial p^2}{\partial z}$, en prenant àprésent ∂z constant, à la place de ∂t qui sort du calcul. L'équation sera donc

$$\frac{p\partial\partial p + \partial p^2}{\partial z} + f\partial p + g\partial z + \frac{hz\partial z}{p} = 0$$

et en mettant $p = xz$ et $\partial p = v\partial z = x\partial z + z\partial x$, pour avoir $\partial\partial p = \partial v\partial z$ et $\frac{\partial z}{z} = \frac{\partial x}{v - x}$, elle sera

$$xz\partial v + vv\partial z + fv\partial z + g\partial z + \frac{h\partial z}{x} = 0$$

d'où nous déduisons:

$$\frac{\partial z}{z} = \frac{x\partial v}{vv + fv + g + \frac{h}{x}} = \frac{\partial x}{v - x}$$

ce qui nous amène cette équation:

$$xx(v - x)\partial v + \partial x(vvx + fvx + gx + h) = 0$$

laquelle, en mettant $v = \frac{y}{x} + x$, se change en celle-ci:

$$y\partial y + (3x + f)y\partial x + (x^3 + fx^2 + gx + h)\partial x = 0$$

qui ne diffère de la précédente que dans les constantes.

Quant à la résolution de cette équation il sera facile de l'obtenir, moyennant la valeur déjà indiquée:

$$z = Ae^{\alpha t} + Be^{\beta t} + Ce^{\gamma t}$$

qui nous donne d'abord

$$p = \frac{\partial z}{\partial t} = \alpha A^{\alpha t} + \beta Be^{\beta t} + \gamma Ce^{\gamma t}$$

d'où nous tirons

$$x = \frac{p}{z} = \frac{x A e^{\alpha t} + \beta B e^{\beta t} + \gamma C e^{\gamma t}}{A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + C e^{\gamma t}}.$$

Enfin on aura

$$v = \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\alpha^2 A e^{\alpha t} + \beta^2 B e^{\beta t} + \gamma^2 C e^{\gamma t}}{\alpha A e^{\alpha t} + \beta B e^{\beta t} + \gamma C e^{\gamma t}}$$

et a l'aide de ces valeurs, à cause de $v - x = \frac{z\partial x}{\partial z} = \frac{z\partial x}{p\partial t}$ et $y = x(v - x) = \frac{xz\partial x}{p\partial t}$, on trouve:

$$y = \frac{\partial x}{\partial t} = \frac{(\beta-\alpha)^2 AB e^{(\alpha+\beta)t} + (\gamma-\alpha)^2 AC e^{(\alpha+\gamma)t} + (\gamma-\beta)^2 BC e^{(\beta+\gamma)t}}{(A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + C e^{\gamma t})^2}.$$

où il faut remarquer que

$$\alpha + \beta + \gamma = - f,$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = g,$$
$$\alpha\beta\gamma = - h.$$

Ainsi les deux variables x et y sont déterminées l'une et l'autre par la même variable t, et l'équation est complettement résolue. Mais j'avoue que la résolution précédente me paroît préférable à certains égards, sans disconvenir qu'il y ait des cas où celle-ci merite la préférence.

SOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES RELATIFS AU DÉVELOPPEMENT DES LIGNES COURBES À DOUBLE COURBURE.

PAR

NICOLAS FUSS.

Présenté à la Conférence le 15 Juin 1804.

§. 1. J'étois tombé, il y a quelque tems, sur l'idée d'appliquer la théorie des développées aux courbes à double courbure, principalement dans la vue d'éclaircir quelques doutes qui m'étoient venus, à l'égard de ces courbes, sur l'identité du rayon osculateur de la courbe décrite par développement avec le rayon de la développée, ou le fil déployé, identité qui fait la base de la théorie du développement dans les courbes à simple courbure. Les recherches, dans lesquelles je me suis trouvé insensiblement engagé, entrainé par l'attrait que cette matière présente, aussi du côté de l'Analyse, m'ont conduit à la solution de plusieurs problèmes assez difficiles et qui, ce me semble, ne sont dépourvus ni d'intérêt, ni même d'utilité. J'en ai détaché ceux qui, préférablement aux au-

tres, m'ont paru mériter quelque attention de la part des Géomètres, et j'ai l'honneur de les présenter à l'Académie dans ce mémoire. Je crois devoir débuter par la recherche des rayons osculateurs des courbes à double courbure et des trois coordonnées de la courbe décrite par les intersections de ces rayons de courbure, non seulement parceque j'aurai besoin, dans la suite, de ces expressions, d'ailleurs assez connues, mais parceque le procédé court et facile qui me les a fournies, semble aussi avoir quelques avantages sur la méthode employée ordinairement à cet effet.

Problème.

§. 2. *Une courbe à double courbure étant donnée, trouver son rayon de courbure dans chaque point, et la courbe dans laquelle se trouvent les centres de tous les rayons osculateurs.*

Solution.

Tab. II. Fig. 1. Soit Z un point quelconque de la courbe donnée, rapporté à l'axe AB par les trois coordonnées $AX = x$, $XY = y$, $YZ = z$; et comme y et z peuvent être regardés comme fonctions de x, soit $\partial y = p \partial x$ et $\partial z = q \partial x$, et soit encore $\partial p = p' \partial x$ et $\partial q = q' \partial x$.

Soit H le centre du cercle osculateur pour l'élément Z, et soyent, pour ce point H, les coordonnées $AF = f$,

$FG = g$, $GH = h$; et en nommant le rayon osculateur $ZH = R$, à cause de $ZH^2 = ZU^2 + HU^2$ et $HU^2 = GV^2 + VY^2$, partant $ZH^2 = FX^2 + VY^2 + ZU^2$, le carré du rayon de courbure sera

$$R^2 = (x - f)^2 + (y - g)^2 + (z - h)^2.$$

Or comme HZ doit conserver la même grandeur par deux élémens consécutifs, il s'en suit que sa différentielle première et seconde doit être égale à zero, ce qui fournit les deux équations suivantes :

$$\text{I.}\quad x - f + p(y - g) + q(z - h) = 0;$$
$$\text{II.}\quad 1 + pp + qq + p'(y - g) + q'(z - h) = 0.$$

De ces deux équations on peut former les combinaisons suivantes :

$$\text{II.}\,q - \text{I.}\,q' = q(1 + pp + qq) + qp'(y - g) - q'(x - f) - pq'(y - g) = 0$$
$$\text{I.}\,p' - \text{II.}\,p = -p(1 + pp + qq) + qp'(z - h) + p'(x - f) - pq'(z - h) = 0$$

qui nous donnent :

$$y - g = \frac{q'(x - f) - q(1 + pp + qq)}{qp' - pq'}$$
$$z - h = \frac{-p'(x - f) + p(1 + pp + qq)}{qp' - pq'}.$$

Il se présente ici une difficulté, c'est que $x - f$ reste indéterminé, mais cette difficulté est facile à lever, si l'on considère que de la manière que nous envisageons le pro-

blème, le point H est effectivement indéterminé et qu'il peut être le sommet d'une infinité de cones droits qui ont le cercle osculateur pour base. Il faut donc déterminer $x-f$ de manière que la ligne ZH, qui peut être l'hypothénuse d'une infinité de triangles rectangles de même base, devienne la plus petite possible.

Or en mettant dans l'expression $R^2 = (x-f)^2 + (y-g)^2 + (z-h)^2$ à la place de $y-g$ et $z-h$ les valeurs trouvées, et posant pour abréger :

$$\frac{p'p' + q'q' + (qp' - pq')^2}{(qp' - pq')^2} = A,$$
$$\frac{(qq' + pp')(1 + pp + qq)}{(qp' - pq')^2} = B,$$
$$\frac{(pp + qq)(1 + pp + qq)^2}{(qp' - pq')^2} = C,$$

on obtient $R^2 = A(x-f)^2 - 2B(x-f) + C$, expression qui doit être un *minimum*, ce qui arrive où $x-f = \frac{B}{A}$, c'est-à-dire :

$$x - f = \frac{(pp' + qq')(1 + pp + qq)}{p'p' + q'q' + (qp' - pq')^2}$$

valeur qui, substituée dans l'expression trouvée tantôt pour R^2, donne le rayon de courbure cherché :

$$R = \sqrt{\frac{(1 + pp + qq)^3}{p'p' + q'q' + (qp' - pq')^2}}.$$

Et si nous mettons pour abréger Θ à la place de la valeur $\frac{1 + pp + qq}{p'p' + q'q' + (qp' - pq')^2}$, nous aurons pour le centre du cercle osculateur les trois coordonnées :

$$f = x - \Theta\,(pp' + qq'),$$
$$g = y - \Theta\,(pqq' - p'(1 + qq)),$$
$$h = z - \Theta\,(qpp' - q'(1 + pp)).$$

Corollaire.

§. 3. Soit la courbe proposée la Spirale d'Archiméde décrite sur la surface d'un cylindre dont AB est l'axe, et le rayon $= c$. Mettons l'angle $YXZ = \Phi$, et comme cet angle doit être proportionnel à l'abscisse, soit $\Phi = \frac{x}{a}$, de sorte que $AX = x = a\Phi$, $XY = y = c\cos.\Phi$, $YZ = z = c\sin.\Phi$, et nous aurons $p = -\frac{c}{a}\sin.\Phi$, $q = \frac{c}{a}\cos.\Phi$, $p' = -\frac{c}{aa}\cos.\Phi$, $q' = -\frac{c}{aa}\sin.\Phi$, partant: Tab. II. Fig. 2.

$$1 + pp + qq = 1 + \frac{cc}{aa};$$
$$qp' - pq' = -\frac{cc}{a^3};$$
$$p'p' + q'q' = \frac{cc}{a^4};$$
$$pp' + qq' = 0.$$

De là on obtient $\Theta = \frac{a^4}{cc}$, et les coordonnées de la courbe cherchée seront:

$$f = x = a\Phi,$$
$$g = -\frac{aa\cos.\Phi}{c},$$
$$h = -\frac{aa\sin.\Phi}{c}.$$

Enfin le rayon osculateur sera $R = \frac{aa + cc}{c}$. La courbe cherchée, décrite par les centres des cercles osculateurs est donc aussi une Spirale d'Archiméde, mais différente

de la proposée. Au reste il est évident qu'à cause de $f = x$ le point F (Fig. 1.) tombe en X et que

$$FH = XH = \sqrt{gg + hh} = \frac{aa}{c}.$$

De plus on voit que $\frac{GH}{FG} = \frac{h}{g} = \text{tag.}\,\phi$, et que partant l'angle $HFG = \phi = ZFY$, donc ZFH une ligne droite. Le rayon de courbure se construit donc facilement pour chaque point Z: on n'a qu'à prolonger $ZX = c$ et à faire le prolongement $XH = \frac{aa}{c}$.

Problème.

Tab. II. Fig. 3. §. 4. *Une courbe à double courbure cz étant développée de manière que le fil se trouve étendu perpétuellement dans la direction de la tangente zZ, déterminer la courbe que décrit l'extrémité du fil ainsi déployé.*

Solution.

Soyent les coordonnées pour la courbe donnée $Ax = x$, $xy = y$, $yz = z$. Soit $\partial y = p\,\partial x$, $\partial z = q\,\partial x$, $\partial p = p'\,\partial x$, $\partial q = q'\,\partial x$. Concevons tirée la tangente zT, et sa projection dans le plan du papier yT, et nommons les angles $Tyx = \phi$ et $Tzy = \psi$, nous aurons:

$$\text{tag.}\,\phi = \frac{1}{p}; \qquad \text{tag.}\,\psi = \frac{\sqrt{1+pp}}{q};$$
$$\text{sin.}\,\phi = \frac{1}{\sqrt{1+pp}}; \qquad \text{sin.}\,\psi = \frac{\sqrt{1+pp}}{\sqrt{1+pp+qq}};$$
$$\text{cos.}\,\phi = \frac{p}{\sqrt{1+pp}}; \qquad \text{cos.}\,\psi = \frac{q}{\sqrt{1+pp+qq}}.$$

Quant à l'élément de la courbe proposée, il est $= \partial x \sqrt{1 + pp + qq}$, de sorte que si nous nommons cet élément $= \partial s$, la droite zZ, qui représente la longueur du fil déployé, sera $zZ = s = \int \partial x \sqrt{1 + pp + qq}$.

Que si pour le point Z de la courbe cherchée, engendrée par le développement, nous nommons les coordonnées $AX = X$, $XY = Y$, $YZ = Z$, nous aurons:

$$z - Z = s \cos.\psi = \frac{qs}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

$$yY = s \sin.\psi = \frac{s\sqrt{1 + pp}}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

$$y - Y = yY \cos.\phi = \frac{ps}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

$$x - X = yY \sin.\phi = \frac{s}{\sqrt{1 + pp + qq}}.$$

Ainsi la solution de nôtre problème est contenue dans les trois formules:

$$X = x - \frac{s}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

$$Y = y - \frac{ps}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

$$Z = z - \frac{qs}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

qui expriment les coordonnées de la courbe cherchée par celles de la courbe donnée.

Scholie 1.

§. 5. Quoique cela suffise pour connoître la courbe engendrée par le développement, un examen plus approfondi de ces formules sera d'autant moins déplacé à la

suite de cette solution, qu'il nous frayera la route à des recherches intéressantes sur le problème inverse. Pour cet effet nous prendrons les différentielles des coordonnées, qui, à cause de $\partial s = \partial x \sqrt{1 + pp + qq}$, seront :

$$\partial X = \frac{s \partial x (pp' + qq')}{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\partial Y = \frac{s \partial x (pqq' - p'(1 + qq))}{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\partial Z = \frac{s \partial x (qpp' - q'(1 + pp))}{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}}.$$

Mettons $\partial Y = P \partial x$ et $\partial Z = Q \partial x$, et nous aurons ces deux équations :

$$\text{I. } P(pp' + qq') = pqq' - p'(1 + qq)$$

$$\text{II. } Q(pp' + qq') = qpp' - q'(1 + pp)$$

qui, combinées, nous fournissent :

$$\text{I. } p + \text{II. } q = (Pp + Qq)(pp' + qq') = -(pp' + qq')$$

$$\text{I. } Q - \text{II. } P = 0 = (pq' - qp')(Qq + Pp) + Pq' - Qp'.$$

De la première combinaison il suit que $Pp + Qq = -1$, ce qui étant substitué dans la seconde, il en résulte

$$q'(P - p) - p'(Q - q) = 0$$

ce qui donne

$$\frac{p'}{q'} = \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{P - p}{Q - q}.$$

En prénant la différentielle de l'équation $Pp + Qq = -1$, on a

$$P \partial p + p \partial P + Q \partial q + q \partial Q = 0.$$

Or $\partial q = \frac{\partial p (Q - q)}{P - p}$, ce qui étant mis à la place de ∂q,

la différentielle devient:

$$\partial p\,(PP + QQ - Pp - Qq) = (p\partial P + q\partial Q)\,(p - P)$$

d'où, à cause de $Pp + Qq = -1$, on tire:

$$\partial p = p'\partial x = \frac{(p - P)\,(p\partial P + q\partial Q)}{1 + PP + QQ}$$

$$\partial q = q'\partial x = \frac{(q - Q)\,(p\partial P + q\partial Q)}{1 + PP + QQ}.$$

En substituant ces valeurs de $p'\partial x$ et $q'\partial x$ dans l'expression trouvée ci-dessus pour ∂X, elle prendra cette forme:

$$\partial X = \frac{s\,(p\partial P + q\partial Q)}{(1 + PP + QQ)\sqrt{1 + pp + qq}}$$

d'où l'on tire la longueur du fil développé:

$$Zz = s = \frac{\partial X\,(1 + PP + QQ)\sqrt{1 + pp + qq}}{p\partial P + q\partial Q}.$$

Corollaire.

§. 6. Le Scholie précédent fait voir que si P et Q sont donnés, il sera toujours facile de déterminer p et q de manière que $Pp + Qq = -1$ et $\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{P - p}{Q - q}$, de sorte que, la courbe engendrée par développement étant donnée, on pourra trouver la développée; et que réciproquement la première peut-être regardée comme la développée et l'autre comme engendrée par développement.

Scholie 2.

§. 7. Séduit par ce qui arrive au développement des courbes à simple courbure, on aurait pu croire que la développée conviendroit parfaitement avec la courbe

que décrivent les centres des cercles osculateurs de la courbe engendrée par développement. Un examen plus approfondi nous a fait voir le contraire, ayant trouvé pour la première de ces deux courbes :

$$x = X + \frac{s}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$
$$y = Y + \frac{ps}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$
$$z = Z + \frac{qs}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

et pour la longueur du fil déployé :

$$Zz = \frac{\partial X (1 + PP + QQ)\sqrt{1 + pp + qq}}{p\partial P + q\partial Q},$$

tandis que pour l'autre courbe nous avons trouvé les coordonnées :

$$f = X - \Theta(P\partial P - Q\partial Q) : \partial X,$$
$$g = Y - \Theta(PQ\partial Q - \partial P(1 + QQ)) : \partial X,$$
$$z = Z - \Theta(QP\partial P - \partial Q(1 + PP)) : \partial X,$$

où $\Theta = \frac{(1 + PP + QQ)\partial X^2}{\partial P^2 + \partial Q^2 + (Q\partial P - P\partial Q)^2}$, et le rayon osculateur :

$$R = \frac{\partial X (1 + PP + QQ)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\partial P^2 + \partial Q^2 + (Q\partial P - P\partial Q)^2}}.$$

L'exemple de la Spirale d'Archimède fait d'ailleurs voir combien il s'en faut que ces courbes fussent les mêmes, son rayon osculateur étant constant, tandis que la longueur du fil déployé de sa développée est nécessairement une quantité variable. Ce paradoxe apparent trouve son explication dans la méthode que nous avons employée pour déterminer le rayon osculateur, que nous avons sup-

posé placé dans le plan passant par deux élémens contigus *ca*, *cb* de la courbe. Car de tous les points de la ligne droite *op*, qui insiste perpendiculairement au plan *aob*, nous avons pris pour centre du cercle osculateur celui qui est à la plus petite distance possible des points *a*, *c*, *b*, de la courbe. Or le point *z* de la développée ne tombe pas nécessairement dans ce point *o*, ni le fil déployé dans le rayon osculateur de la courbe engendrée par développement, attendu que le même cercle osculateur peut être décrit d'une infinité d'autres centres tous situés dans la perpendiculaire *op*. Tab. II. Fig. 4.

Scholie 3.

§. 8. Ayant fait voir dans le problème précédent, comment, la développée *cz* étant donnée, on peut trouver la courbe engendrée par développement CZ, il nous resteroit aprésent à montrer, comment on puisse déterminer la développée *cz* de chaque courbe donnée, envisagée comme engendrée par développement. Or ce problème inverse paroît être difficile, si non impossible à résoudre dans la plûpart des cas, parcequ'on y est conduit à des équations différentielles que l'on ne peut intégrer par aucune des méthodes connues. Il se présente encore une autre difficulté, c'est que chaque courbe à double courbure CZ, envisagée comme engendrée par développement, Tab. II. Fig. 3.

peut avoir une infinité de développées. Cependant la solution du dernier problème nous fraye le chemin de trouver une infinité de courbes à double courbure, dont on peut assigner les développées. Les problèmes suivans feront voir comment on arrive à cette fin.

Problème.

§. 9. *Soit la courbe* CZ, *engendrée par développement, la Spirale d'Archimède, trouver toutes ses développées* cz.

Solution.

Soit $X = a\Phi$, $Y = c \sin. \Phi$, $Z = - c \cos. \Phi$, et nous aurons :

$$P = \frac{c \cos. \Phi}{a} = n \cos. \Phi$$

$$Q = \frac{c \sin. \Phi}{a} = n \sin. \Phi.$$

Or comme en vertu du §. 5. il faut que :

$$1°)\ Pp + Qq + 1 = 0 \text{ et } 2°)\ \frac{\partial p}{\partial q} = \frac{p - P}{q - Q},$$

supposons que pour la développée cherchée il y ait

$$p = - \frac{\cos. \Phi}{n} + v \sin. \Phi,$$

$$q = - \frac{\sin. \Phi}{n} - v \cos. \Phi,$$

moyennant quoi nous aurons satisfait à la première condition $Pp + Qq + 1 = 0$. Quant à l'autre, qui est :

$$- \partial p (q - Q) + \partial q (p - P) = 0$$

si nous mettons pour abréger $\frac{1 + nn}{n} = \lambda$, à cause de

$$\partial p = \frac{\partial \Phi \sin. \Phi}{n} + \partial v \sin. \Phi + v \partial \Phi \cos. \Phi,$$
$$\partial q = \frac{\partial \Phi \cos. \Phi}{n} - \partial v \cos. \Phi + v \partial \Phi \sin. \Phi,$$
$$q - Q = - \lambda \sin. \Phi - v \cos. \Phi,$$
$$p - P = - \lambda \cos. \Phi + v \sin. \Phi,$$

nous aurons cette équation de condition à résoudre :

$$\frac{\lambda \partial \Phi}{n} + \lambda \partial v + v v \partial \Phi = 0,$$

laquelle nous donne :

$$- \partial \Phi = \frac{\lambda \partial v}{\frac{\lambda}{n} + v v}$$

dont l'intégrale est :

$$\alpha - \Phi = \sqrt{\lambda n} \,.\, \text{Arc. tag.}\, v \sqrt{\frac{n}{\lambda}}.$$

Soit $\frac{\alpha - \Phi}{\sqrt{\lambda n}} = \omega$, et nous aurons $v = \sqrt{\frac{\lambda}{n}} \text{ tag. } \omega$, et partant:

$$1 + pp + qq = \frac{\lambda}{n} + vv = \frac{\lambda}{n}(1 + \text{tg. } \omega^2) = \frac{\lambda}{n \cos. \omega^2}.$$

Au §. 5. nous avions trouvé :

$$\partial X = \frac{s \partial x (pp' + qq')}{(1 + pp + qq)^{\frac{3}{2}}} = - s \partial \,.\, \frac{1}{\sqrt{1 + pp + qq}},$$

de sorte que

$$\partial X = - s \,.\, \sqrt{\frac{n}{\lambda}}\, \partial \,.\, \cos. \omega = s \sqrt{\frac{n}{\lambda}} \,.\, \partial \omega \sin. \omega.$$

Or comme $X = a\Phi$ et

$$\partial X = a \partial \Phi = - a \partial \omega \sqrt{\lambda n}$$

ces deux valeurs de ∂X comparées fournissent la longueur du fil déployé :

$$s = \frac{\lambda a}{\sin. \omega}.$$

Enfin les coordonnées pour la développée, tirées du §. 7, seront :

$$x = a\Phi + a\sqrt{\lambda n}\,.\,\text{cot.}\,\omega\,,$$
$$y = (c + \lambda a)\,\text{sin.}\,\Phi - a\sqrt{\tfrac{\lambda}{n}}\,\text{cot.}\,\omega\,\text{cos.}\,\Phi\,,$$
$$z = -(c + \lambda a)\,\text{cos.}\,\Phi - a\sqrt{\tfrac{\lambda}{n}}\,\text{cot.}\,\omega\,\text{sin.}\,\Phi.$$

Où il faut remarquer qu'à cause de la constante arbitraire α, introduite par l'intégration, notre solution fournit une infinité de développées.

Problème.

§. 10. *Si la courbe donnée CZ, engendrée par développement, est une courbe à simple courbure, trouver toutes ses développées qui sont courbes à double courbure.*

Solution.

La courbe CZ sera à simple courbure, lorsque $Z = 0$ et partant $Q = 0$. Les équations de condition 1°) $Pp + Qq + 1 = 0$ et 2°) $\frac{\partial p}{\partial q} = \frac{p - P}{q - Q}$ nous fournissent donc, la première $p = -\frac{1}{P}$, la seconde: $q\,\partial p = p\,\partial q - P\,\partial q$, ou bien $\frac{\partial q}{q} = \frac{\partial p}{p - P}$, c'est-à-dire:

$$\frac{\partial q}{q} = \frac{p\,\partial p}{1 + pp}$$

dont l'intégrale est

$$l\,q = l\,n + l\sqrt{1 + pp};$$

d'où il suit que $q = n\sqrt{1 + pp}$, de sorte qu'en exprimant tout par les élémens de la courbe donnée, nous aurons :

$$p = -\frac{1}{P}$$
$$q = \frac{n\sqrt{1+PP}}{P}$$
$$\sqrt{1+pp+qq} = \frac{m\sqrt{1+PP}}{P}$$

en mettant pour abrêger $1 + nn = mm$. Cela étant trouvé, nous aurons :

$$\partial X = -s . \partial . \frac{1}{\sqrt{1+pp+qq}} = -\frac{s}{m}\partial . \frac{P}{\sqrt{1+PP}},$$

c'est - à - dire

$$\partial X = -\frac{s}{m}\frac{\partial P}{(1+PP)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où nous obtenons la longueur du fil déployé

$$s = -\frac{m\partial X(1+PP)^{\frac{3}{2}}}{\partial P} = + mR,$$

en désignant par R le rayon osculateur de la courbe donnée engendrée par développement. Quant aux trois coordonnées de la développée, elles seront :

$$x = X - \frac{P\partial X(1+PP)}{\partial P},$$
$$y = Y + \frac{\partial X(1+PP)}{\partial P},$$
$$z = -\frac{n\partial X(1+PP)^{\frac{3}{2}}}{\partial P}.$$

Problème.

§. 11. *Trouver une infinité de courbes à double courbure, dont on puisse assigner les développées.*

Solution.

On aura une infinité de pareilles courbes, en mettant pour les coordonnées :

$$AX = X,$$
$$XY = Y = n\int \partial X \cos.\Phi,$$
$$YZ = Z = n\int \partial X \sin.\Phi,$$

où l'angle Φ est déterminé d'une manière quelconque par X. Or pour toutes ces courbes il y aura :

$$P = n \cos.\Phi,$$
$$Q = n \sin.\Phi,$$

desorte que si pour les développées on pose :

$$p = -\frac{\cos.\Phi}{n} + v \sin.\Phi,$$
$$q = -\frac{\sin.\Phi}{n} - v \cos.\Phi,$$

on aura satisfait à la condition que

$$1^{o}) \quad Pp + Qq + 1 = 0.$$

Quant à l'autre condition, que :

$$2^{o}) \quad \partial q\,(p - P) - \partial p\,(q - Q) = 0,$$

elle nous mène à l'équation :

$$\frac{\lambda\partial\Phi}{n} + \lambda\partial v + vv\partial\Phi = 0,$$

qui nous fournit comme §. 9.

$$a - \Phi = \sqrt{\lambda n}\ .\ A\ \text{tag.}\ v\sqrt{\tfrac{n}{\lambda}},$$

desorte qu'en mettant $\frac{a-\Phi}{\sqrt{\lambda n}} = \omega$, nous aurons $v = \sqrt{\frac{\lambda}{n}}.\text{tg.}\,\omega$ et $s = \frac{\lambda a}{\sin.\omega}$ et les coordonnées de la développée :

$$x = X + a\sqrt{\lambda n}\ .\ \cot.\omega,$$
$$y = Y + ap\sqrt{\lambda n}\ .\ \cot.\omega,$$
$$z = Z + aq\sqrt{\lambda n}\ .\ \cot.\omega.$$

Corollaire.

§. 12. Les courbes CZ engendrées par développement, que nous avons cherchées dans le problème précédent, seront faciles à construire. Car décrivons une courbe quelconque à simple courbure AMN, rapportée à l'axe AB par l'abscisse AP et l'ordonnée PM, et faisons $X = \frac{1}{n} AM$, $Y = AP$, $Z = PM$, et il est évident que si nous désignons l'arc AM par S et l'amplitude de la courbe par Φ, il y aura $AP = \int \partial S \cos. \Phi$ et $PM = \int \partial S \sin. \Phi$. Or donc puisque par hypothèse il y a $AM = S = nX$, donc $\partial S = n \partial X$, nous aurons $Y = n \int \partial X \cos. \Phi$ et $Z = n \int \partial Y \sin. \Phi$, ce qui sont exactement les coordonnées de nos courbes cherchées. Fig. 5.

SERIES QUAEDAM TRIGONOMETRICAE EX THEOREMATE TAYLORIANO INVERSO DEDUCTAE.

AUCTORE

M. PFAFF.

Conventui exhib. die 16 Martii 1808.

1. Dum formulas in usus astronomicos aliquas, calculo aptas commodo, pararem, in animum venit methodum quae reversione theorematis *Tayloriani* nititur, amplius exponendi.

Duabus autem formis occurrit theorema de reversione, altera elementari, in analysi combinatoria olim ab auctoribus fusius tractata; altera differentiationum ope construenda, quam perfectam tradidit auctor Mechanices caelestis. Priorem formam jam hic sequar. Adhibitis itaque designationibus usitatis, ita ut $\Phi x =$ functio x, Δx, $\Delta \Phi x$ incrementa x ac Φx, erit ex *Taylorio*:

$$\Delta \Phi x = \Delta x \,.\, \frac{\partial \Phi x}{\partial x} + \frac{\Delta x^2}{2} \,.\, \frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2} + \frac{\Delta x^3}{6} \,.\, \frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3} + \ldots\ldots$$

quae series ope methodi reversoriae mutatur in sequentem:

2. $$\Delta x = \Delta \Phi x \cdot \frac{1}{\frac{\partial \Phi x}{\partial x}}$$

$$+ (\Delta . \Phi x)^2 \left\{ - \frac{\partial^2 \Phi x}{2 . \partial x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^3} \right\}$$

$$+ (\Delta . \Phi x)^3 \left\{ - \frac{\partial^3 \Phi x}{6 . \partial x^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^2 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^5} \right\}$$

$$+ (\Delta . \Phi x)^4 \left\{ - \frac{\partial^4 \Phi x}{24 . \partial x^4} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^5} + \frac{5}{12} \cdot \frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^6} - \frac{5}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^3 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^7} \right\}$$

$$+ (\Delta . \Phi x)^5 \begin{cases} - \frac{1}{120} \frac{\partial^5 \Phi x}{\partial x^5} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^6} \\ + \left\{ \frac{1}{8} \frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^4 \Phi x}{\partial x^4} + \frac{1}{12} \left(\frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3}\right)^2 \right\} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^7} \\ - \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^2 \cdot \frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^8} \\ + \frac{7}{8} \cdot \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^4 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^9} \end{cases}$$

$$+ (\Delta . \Phi x)^6 \begin{cases} - \frac{1}{720} \cdot \frac{\partial^6 \Phi x}{\partial x^6} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^7} \\ + \left\{ \frac{7}{240} \frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^5 \Phi x}{\partial x^5} + \frac{7}{144} \frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3} \cdot \frac{\partial^4 \Phi x}{\partial x^4} \right\} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^8} \\ - \left\{ \frac{7}{18} \frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2} \cdot \left(\frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3}\right)^2 + \frac{7}{24} \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^2 \cdot \frac{\partial^4 \Phi x}{\partial x^4} \right\} \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^9} \\ + \frac{7}{4} \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^3 \cdot \frac{\partial^3 \Phi x}{\partial x^3} \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^{10}} \\ - \frac{21}{16} \left(\frac{\partial^2 \Phi x}{\partial x^2}\right)^5 \cdot \frac{1}{\left(\frac{\partial \Phi x}{\partial x}\right)^{11}} . \end{cases}$$

3. Series haec calculo subducto facile continuatur. Applicationes hae sequuntur.

a) Ponatur $\Phi x = \log. x$; obtinetur notissima series, quae $\frac{a}{x}$ per logarithmum $(1 + \frac{a}{x})$ ope seriei infinitae exprimitur:

b) Ponatur $x^m = \Phi x$; coëfficientes seriei, qua Δx exponitur, erunt functiones m; atque x in denominatorem abit; coëfficientibus his per $F'm$, $F''m$, $F'''m$ notatis, obtinetur:

$$\frac{m \Delta x}{x} = \left(\frac{\Delta \Phi x}{x^m}\right) + \left(\frac{\Delta \Phi x}{x^m}\right)^2 . F'm + \left(\frac{\Delta \Phi x}{x^m}\right)^3 F''m \text{ etc. } \ldots$$

positis $m = 2$; $\Delta \Phi x$, abit in $(2x + \Delta x) \Delta x$; atque si $\Delta x = 1$ sumatur, obtinetur factis substitutionibus commodis, series:

$$\begin{aligned} Z = Z . (Z + 1) & - 2 . \tfrac{1}{2} . Z^2 . (Z + 1)^2 \\ & + \tfrac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} . \tfrac{1}{3} . Z^3 . (Z + 1)^3 \\ & - \tfrac{4 \cdot 5 \cdot 6}{2 \cdot 3} . \tfrac{1}{4} . Z^4 . (Z + 1)^4 \\ & + \tfrac{5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{2 \cdot 3 \cdot 4} . \tfrac{1}{5} . Z^5 . (Z + 1)^5 \\ & - \ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

c) Ponatur $\Phi x = \sin. x$; prodit

$$\begin{aligned} \Delta x = & \frac{\Delta \Phi x}{\cos. x} + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos. x}\right)^2 . \tfrac{1}{2} \text{ tg. } x \\ & + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos. x}\right)^3 . [\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} (\text{tg. } x)^2] \\ & + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos. x}\right)^4 . [\tfrac{3}{8} \text{ tang. } x + \tfrac{5}{8} \text{ tg.}^3 x] \\ & + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos. x}\right)^5 . [\tfrac{3}{40} + \tfrac{3}{4} \text{ tg.}^2 x + \tfrac{7}{8} \text{ tang.}^4 x] \\ & + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos x}\right)^6 . [\tfrac{15}{48} \text{ tg. } x + \tfrac{35}{24} \text{ tg.}^3 x + \tfrac{21}{16} \text{ tg.}^5 x] \\ & + \left(\frac{\Delta \Phi x}{\cos. x}\right)^7 . [\tfrac{19}{1650} + \tfrac{181}{180} \text{ tg.}^2 x + \tfrac{1}{16} \text{ tg.}^4 x + \tfrac{33}{16} \text{ tg.}^6 x]. \end{aligned}$$

Series haec commode applicatur, dum ex aequatione

sin. declinationis $=$ sin. obliq. sin. longit. cos. latitud.

$+$ cos. obliq. sin. latitud.

praecessio in declinatione derivatur; hoc casu itidem ope *Tayloriani*, $\Delta \phi x$, per praecessionem in longitudine exprimitur.

Cum vero jam sit:

$$\Delta \phi x = \sin.(x + \Delta x) - \sin. x$$
$$= 2 . \cos.(x + \tfrac{\Delta x}{2}) \sin. \tfrac{\Delta x}{2}$$

ponendo $\frac{\Delta x}{2} = q$, prodit series:

$$2 . q = \frac{\cos.(x+q)}{\cos. x} . 2 \sin. q$$
$$+ \left(\frac{\cos.(x+q)}{\cos. x}\right)^2 . (2 \sin. q)^2 \tfrac{1}{2} \text{tg.}\, x$$
$$+ \left(\frac{\cos.(x+q)}{\cos. x}\right)^3 . (2 \sin. q)^3 [\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} \text{tang.}^2 x]$$
$$+ \ldots \ldots \ldots$$

Quicunque itaque sit valor x, summa hujus seriei, constans, manente q invariata.

Posito $q = \frac{\pi}{2} =$ quadranti periferiae, oritur $\cos.(x + q) = \cos.(x + \frac{\pi}{2}) = - \sin. x$; hinc series

$$\pi = - \text{tg.}\, x . 2$$
$$+ \text{tg.}^2 x . 2^2 . \frac{\text{tg.}\, x}{2}$$
$$- \text{tg.}^3 x . 2^3 . (\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} \text{tg.}^2 x)$$
$$+ \text{tg.}^4 x . 2^4 . (\tfrac{9}{24} \text{tg.}\, x + \tfrac{5}{8} . \text{tg}^3 . x)$$
$$- \text{tg.}^5 x . 2^5 . (\tfrac{9}{120} + \tfrac{3}{4} . \text{tg.}^2 x + \tfrac{7}{8} . \text{tg.}^4 x)$$
$$+ \ldots \ldots \ldots$$

quae series singularis videtur.

Series allata,

$$2q = \frac{\cos. x + q}{\cos. x} \cdot 2 \sin. q + \left(\frac{\cos. (x+q)}{\cos. x}\right)^2 \cdot 2^2 \sin. q^2 \cdot \tfrac{1}{2} \operatorname{tg}. x \ldots\ldots$$

Si denuo reversionis ope tractetur, novas suppeditabit series: scilicet

1) $\frac{(\cos. x + q)}{\cos. x}$ exprimi potest per seriem, procedentem ex potentiis $\frac{q}{\sin. q}$; coëfficientes erunt functiones sin. q, ac tang. x.

2) Sin. q exhiberi potest per seriem, procedentem juxta potestates q, coëfficientes erunt functiones $\frac{\cos. x + q}{\cos. x}$, ac tang. x: in quibus formulis x et q mere sunt arbitrarii, ab invicem non pendentes.

d) Si Δx negativa ponatur, coëfficientes seriei, qua Δx per $\Delta \phi x$ exprimitur formam quidem servant, verum coëfficientes numerici mutantur.

e) Ponatur $\phi x = \cos. x$, atque sumatur

$$\Delta \phi x = \cos. (x - \Delta x) - \cos. x = 2 \sin. \left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) \sin. \frac{\Delta x}{2}$$

coëfficientes hujus seriei iidem manebunt, qui in *c* occurrunt; attamen potestates variantur, ita ut hoc casu, positis $\frac{\Delta x}{2} = q$, emergat:

$$\begin{aligned} \Delta x = & \frac{\sin. (x - q)}{\sin. x} \; 2 \sin. q \\ & + \left(\frac{\sin. (x-q)}{\sin. x}\right)^2 (2 \sin. q)^2 \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}. x \\ & + \left(\frac{\sin. (x-q)}{\sin. x}\right)^3 (2 \sin. q)^3 \left[\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} \operatorname{cotg}.^2 x\right] \\ & + \left(\frac{\sin. (x-q)}{\sin. x}\right)^4 (2 \sin. q)^4 \left[\tfrac{3}{8} \operatorname{cotg}. x + \tfrac{5}{8} \operatorname{cotg}.^3 x\right] \end{aligned}$$

tg. x ex formula c abit in cotg. x,

$$\frac{\cos.(x+q)}{\cos x} \text{ in } \frac{\sin.(x-q)}{\sin. x},$$

similis vero formula pro valore Δx positivo deducitur;

$$2q = -\frac{\sin. x+q}{\sin. x} 2 (\sin. q)$$
$$+ \left(\frac{\sin.(x+q)}{\sin. x}\right)^2 (2 \sin. q)^2 . \tfrac{1}{2} \text{cotg. } x$$
$$- \left(\frac{\sin. x+q}{\sin. x}\right)^3 . (2 \sin. q)^3 . (-\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{2} \text{cotg.}^2 x)$$
$$+ \left(\frac{\sin (x+q)}{\sin. x}\right)^4 . (2 \sin. q)^4 (+\tfrac{11}{24} \text{cotg.} x + \tfrac{5}{16} \text{cotg.}^3 x).$$

f) Positis denique $\phi x = \text{tg.} x$; exoritur:

$$\Delta x = [\Delta \phi x . \cos.^2 x]$$
$$+ (\Delta \phi x . \cos.^2 x)^2 . (-\text{tg. } x)$$
$$+ (\Delta \phi x . \cos.^2 x)^3 (-\tfrac{2}{6} + \text{tg.}^2 x)$$
$$- (\Delta \phi x . \cos.^2 x)^4 (\text{tg. } x - \tfrac{1}{4} \text{tg.}^3 x).$$

Cum vero jam sit $\Delta \phi x = \frac{\sin. \Delta x}{\cos.(x+\Delta x) \cos. x}$, obtinetur:

$$q = \frac{\cos. x}{\cos.(x+q)} . \sin. q - \left(\frac{\cos. x}{\cos.(x+q)}\right)^2 \sin.^2 q . \text{tg. } x$$
$$+ \left(\frac{\cos. x}{\cos.(x+q)}\right)^3 \sin. q.^3 (-\tfrac{2}{6} + \text{tg.}^2 x) + \ldots\ldots$$

Haec fere sunt, quae dum praecessionis calculum prosequebar, adplicari posse reputabam.

DE MUTUA INTEGRALIUM QUORUNDAM INTER SE RELATIONE.

AUCTORE

C. F. KAUSLER.

Conventui exhib. die 11 Maji 1808.

§. 1. In commercio epistolico celeb. *Lamberti* clar. *Hollandus*, litteris praematura morte infeliciter ereptus, sagacissimo amico ideam proponit, quaedam Integralia, si quidem tanquam termini cujusdam seriei spectantur, ex aliis ejusdem seriei terminis, vel integralibus cognitis, determinandi. Ad probandam possibilitatem, quod dentur hujus modi Integralia, seriem:

$$\frac{\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}},\ \frac{x\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}},\ \frac{x^2\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}} \cdots\cdots \frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}},\ \frac{x^m\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}},$$

considerat, ac methodo satis ingeniosa valorem $\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ hoc modo expressum exhibet:

$$\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}} = \frac{(2m-1)}{2m}\,b\int\frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}} - \frac{1}{m}\,x^{m-1}\sqrt{(bx-x^2)}.$$

Quodsi nunc $m = 1$ assumamus, integrale $\int\frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, abit in $\int\frac{\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, cujus valor, ut constat, est $=$ Arc. sin. $\frac{2\sqrt{(bx-x^2)}}{b}$, proinde $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ erit $= \frac{b}{2}$ Arc. sin. $\frac{2\sqrt{(bx-x^2)}}{b} - \sqrt{(bx-x^2)}$. Posito itaque $m = 2, 3, 4$ etc. prodibunt successive integralia $\int\frac{x^2\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, $\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ etc., quae omnia ex integrali

cognito $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ per simplicem substitutionem obtinentur. *Lambertus* in sua quidem responsione speciminis prolati elegantiam collaudat, sed de magno hujus methodi in calculo integrali usu ac adplicatione, ideo dubitavit, quod istae series, quarum terminos hoc modo tractare licet, plerumque ejusmodi sint indolis, ut terminus generalis integrationem admittat. Ad confirmandam hanc sententiam exhibet integrale $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ per methodum communem. *Hollandus*, acutissimi viri opinione vel convictus, vel ab ulteriore disquisitione deterritus, nullam amplius, quantum mihi quidem constat, de hac re mentionem fecit. Praeter ea enim, quae modo allegavi, nihil ad hanc materiam spectans, in libro citato reperitur.

Cum vero nil eorum, quae ad perficiendum calculum integralem contribuere possunt, negligendum sit, non incongruum esse arbitror, si methodum a clar. *Hollando* propositam, examini subjiciam, ut dijucicari possit, an nova quaedam subsidia calculi integralis nobis suppeditet, et quinam sint isti casus, in quibus cum successu adplicari possit. Quod vero ad celeb. *Lamberti* objectionem contra utilitatem hujus methodi attinet, exempla, quae in sequentibus solvemus, satis superque ostendent, illam non esse magni momenti, cum non nisi de quibusdam valeat casibus specialibus, innumeri alii autem praestantiam methodi,

praecipue in exploranda integralium inter se relatione, luce clarius probaturi sint.

§. 2. Priusquam autem ipsam tractationem adoriamur, methodum, qua omnia nituntur, breviter exponere, eamque ad idem exemplum, cujus jam mentionem fecimus, adplicare conveniet.

Hunc in finem sumamus seriem $\frac{\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, $\frac{x\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$, $\frac{x^2\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ . . . . . . ejusque terminum generalem $\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}$ ponamus $=\partial Q$, et terminum antecedentem $\frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}=\partial P$, hisce notatis, habebimus:

$$x^{m-1}\partial x=\sqrt{(bx-x^2)}\,\partial P,\ \text{et}$$
$$x^{m-1}\sqrt{(bx-x^2)}\,\partial x=(bx-x^2)\,\partial P,\ \text{vel}$$
$$x^{m-2}\sqrt{(bx-x^2)}\,\partial x=b\partial P-\partial Q.$$

Quodsi nunc productum $\frac{x^{m-1}}{m-1}\sqrt{(bx-x^2)}=R$ statuatur, erit $\partial R=x^{m-2}\sqrt{(bx-x^2)}\,\partial x+\frac{x^{m-1}}{m-1}\left(\frac{b-2x}{2\sqrt{(bx-x^2)}}\right)\partial x$, vel $\partial R=x^{m-2}\sqrt{bx-x^2)}\,\partial x=\frac{b\partial P}{2(m-1)}-\frac{\partial Q}{m-1}$. Additis igitur in aequatione $x^{m-2}\sqrt{(bx-x^2)}\,\partial x=b\,\partial P-\partial Q$, utrimque terminis $\frac{b\partial P}{2(m-1)}-\frac{\partial Q}{m-1}$, prodibit:

$$\partial R=\frac{b}{2}\left(\frac{2m-1}{m-1}\right)\partial P-\frac{m\partial Q}{m-1},\ \text{hinc integrando:}$$
$$R=\frac{b}{2}\left(\frac{2m-1}{m-1}\right)P-\frac{m}{m-1}Q,\ \text{et}$$
$$Q=b\,\frac{\left(\frac{2m-1}{2}\right)P-(m-1)R}{m},\ \text{scilicet}$$
$$\int\frac{x^m\partial x}{\sqrt{(bx-z^2)}}=b\left(\frac{2m-1}{2m}\right)\int\frac{x^{m-1}\partial x}{\sqrt{(bx-x^2)}}-\frac{x^{m-1}\sqrt{(bx-x^2)}}{m}.$$

§. 3. Transeamus nunc ad casus generaliores, considerando seriem:

$$\frac{\partial v}{y},\ \frac{x\partial x}{y},\ \frac{x^2\partial x}{y}\ \ldots\ \frac{x^{n-1}\partial x}{y} = \partial P,\ \frac{x^n\partial x}{y} = \partial Q,$$

in qua y functionem ipsius x denotat. Cum autem, si y rationalis supponatur, integratio termini generalis hujus seriei nulla laboret difficultate, litterae y valorem irrationalem tribuamus, ponendo $y = \sqrt[m]{Y}$, vel $y^m = Y$, hoc modo erit:

$$\frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt[m]{Y}} = \partial P, \text{ et } x^{n-1}\partial x = \sqrt[m]{Y}\,\partial P, \text{ proinde}$$

$$x^{n-1}\sqrt[m]{Y^{m-1}}\,\partial x = Y\partial P.$$

Jam si volumus (a simpliciori enim ad compositum ascendemus) ut in serie nostra integrale cujusdam termini per integrale termini immediate praecedentis determinetur, Y necessario formae $x^p(a+bx)$ esse debebit. Posito nimirum $Y = x^p(a+bx)$, aequatio $x^{n-1}Y^{\frac{m-1}{m}}\partial x = Y\partial P$ abit in hanc:

$$\text{A)}\quad x^{n-p-1}Y^{\frac{m-1}{m}}\partial x = a\partial P + b\partial Q.$$

Sit porro $R = \frac{x^{n-p}}{n-p}Y^{m-1}$, hinc erit

$$\partial R = x^{n-p-1}\ Y^{m-1}\ \partial x + \frac{m-1}{m(n-p)}\ x^{n-p}\frac{\partial Y}{\sqrt[m]{Y}},\ \text{vel,}$$

ob $\partial Y = (apx^{p-1} + b(p+1)x^p)\partial x$, erit

$$\partial R = x^{n-p} \sqrt[m]{Y^{m-1}}\, \partial x + \frac{(m-1)ap}{m(n-p)} \partial P + \frac{(m-1)(p+1)b}{m(n-p)} \partial Q.$$

Additis igitur in aequatione A) utrimque terminis:

$\frac{(m-1)ap}{m(n-p)} \partial P + \frac{(m-1)(p+1)b}{m(n-p)} \partial Q$, nanciscimur:

$\partial R = \left(1 + \frac{(m-1)p}{m(n-p)}\right) a \partial P + \left(1 + \frac{(m-1)(p+1)}{m(n-p)}\right) b \partial Q$, et integrando:

$$R = a\,\frac{(m(n-p) + (m-1)p)\,P + b\,(m(n-p) + (m-1)(p+1))\,Q}{m(n-p)}$$

hinc

$$Q = \frac{m x^{n-p} \sqrt[m]{Y^{m-1}} - a(mn-p)P}{b\,(m(n-p) + (m-1)(p+1))}, \text{ scilicet}$$

$$\int \frac{x^n \partial y}{\sqrt[m]{Y}} = \frac{m x^{n-p} \sqrt[m]{Y^{m-1}} - a(mn-p)\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt[m]{Y}}}{b\,(m(n-p) + (m-1)(p+1))}$$

ubi $Y = x^p (a + bx)$ positum esse meminisse juvabit.

§. 4. Ponamus $p = 1$, $b = -1$, et $m = 2$, hoc casu integrale:

$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{Y}}$ vel $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(bx - x^2)}}$ evadit:

$$= a\left(\frac{2n-1}{2n}\right)\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(bx - x^2)}} - \frac{1}{n} x^{n-1} \sqrt{(ax - x^2)},$$

qui valor cum eo, quem §. 2. invenimus, convenit.

§. 5. Si $a = 2c$, $b = 1$, $p = 1$, et $m = 2$, aequatio nostra generalis induet formam:

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = -c\left(\frac{2n-1}{n}\right)\int \frac{x^{n-1}\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} + \frac{x^{n-1}\sqrt{(2cx + x^2)}}{n},$$

sed pro $n = 1$, notum est, esse:

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = \log. \frac{\sqrt{(2c + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2c + x)} - \sqrt{x}},$$

hinc

$$\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = \sqrt{(2cx + x^2)} - c \log. \frac{\sqrt{(2c + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2c + x)} - \sqrt{x}}.$$

Simili modo pro $x = 2$ obtinebimus:

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(2cx + x^2)} - \tfrac{3c}{2} \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}, \text{ vel}$$

$$\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}} = \tfrac{1}{2} x \sqrt{(2cx + x^2)} - \tfrac{3}{2} c \sqrt{(2cx + x^2)} + \tfrac{3}{2} c^2 \log. \frac{\sqrt{(2c + x)} + \sqrt{x}}{\sqrt{(2c + x)} - \sqrt{x}}$$

et sic porro

§. 6. Exempla, quibus solutionem generalem illustravimus, inter simplissima hujus generis sunt ponenda. Pro utroque terminus generalis seriERUM, quibus attinent, integrari potest, quia tam in $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(ax - x^2)}}$ quam in $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(2cx + x^2)}}$ irrationalitas facillime tollitur. In his igitur casibus objectio §. 1. locum habet. Si autem valores m et p ita sunt comparati, ut integrale $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt[m]{Y}}$ neque algebraice, neque per arcus circulares, vel logarithmos, assignari queat, fieri omnino poterit, ut in serie $\frac{\partial x}{\sqrt[n]{Y}}$, $\frac{x \partial x}{\sqrt[m]{Y}}$ etc. detur quidam terminus simplicior, sive per logarithmos, sive per Arcus circulares, vel alio modo integrabilis, qui si existat, integralia omnium seriei terminorum per expressiones a nobis exhibitas, ex eo deduci poterunt.

§. 7. Progrediamur nunc ad casum quo integratio termini $\frac{x^n \partial x}{y}$ nostrae seriei ab integratione termini cujusdam non immediate praecedentis $\frac{x^{n-\nu}\partial x}{y}$ pendet. Si iterum $y = \sqrt[m]{Y}$, et $\frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{Y}} = \partial P$ statuatur, habebimus, ut supra, $x^n Y^{\frac{m-1}{m}} \partial x = Y \partial P$. Haec aequatio, posito $Y = x^q (a + b x^\nu)$ induit hanc formam:

$$\text{B)} \quad x^{n-q-\nu} Y^{\frac{m-1}{m}} \partial x = \frac{a \partial P}{x^\nu} + b \partial P$$

Sit jam $R = \frac{1}{n-q-\nu+1} x^{n-q-\nu+1} Y^{\frac{m-1}{m}}$, erit

$\partial R = x^{n-q-\nu} Y^{\frac{m-1}{m}} \partial x + \frac{(m-1)}{m(n-q-\nu+1)} x^{n-q-\nu+1} \frac{\partial Y}{Y}$, vel ob

$$\partial Y = a q x^{q-1} \partial x + b(q+\nu) x^{q+\nu-1} \partial x \text{ erit}$$

$$\partial R = x^{n-q-\nu} Y^{\frac{m-1}{m}} \partial x + \frac{m-1}{m(n-q-\nu+1)} \left(\frac{a q x^{n-\nu} \partial x}{\sqrt[m]{Y}} + \frac{b(q+\nu) x^n \partial x}{\sqrt[m]{Y}} \right).$$

Sed per aequationem B) consecuti sumus pro formula $x^{n-q-\nu} Y^{\frac{m-1}{m}} \partial x$ valorem $\frac{a \partial P}{x^\nu} + b \partial P$, quo substituto in expressione ∂R, nanciscimur:

$$\partial R = a\left(1 + \frac{(m-1)q}{m(n-q-\nu+1)}\right) \frac{x^{n-\nu} \partial x}{\sqrt[m]{Y}} + b\left(1 + \frac{(m-1)(q+\nu)}{m(n-q-\nu+1)}\right) \frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{Y}},$$

et integrando:

$$R = a\left(1 + \frac{m-1)q}{m(n-q-\nu+1)}\right) \int \frac{x^{n-\nu} \partial x}{\sqrt[m]{Y}} + b\left(1 + \frac{(m-1)(q+\nu)}{m(n-q-\nu+1)}\right) \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{Y}}.$$

Consequenter : $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{(a x^q + b x^{q+\nu})}} =$

$$\frac{\frac{x^{n-q-\nu+1}}{n-q-\nu+1}\sqrt[m]{(ax^q+bx^{q+\nu})^{m-1}} - a\left(1+\frac{(m-1)q}{m(n-q-\nu+1)}\right)\int\frac{x^{n-\nu}\partial x}{\sqrt[m]{(ax^q+bx^{q+\nu})}}}{b\left(1+\frac{(m-1)(q+\nu)}{m(n-q-\nu+1)}\right)}$$

vel $\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt[m]{(a x^q + b x^{q+\nu})}} =$

$$\frac{mx^{n-q-\nu+1}\sqrt[m]{(ax^q+bx^{q+\nu})^{m-1}} - a[(m-1)q+m(n-q-\nu+1)]\int\frac{x^{n-\nu}\partial x}{\sqrt[m]{(ax^q+bx^{q+\nu})}}}{b[(m-1)(q+\nu)+m(n-q-\nu+1)]}$$

§. 8. Illustremus hanc solutionem nonnullis exemplis.

Exemplum primum.

Si $q = 0$, $a = 1$, $b = -1$, $\nu = 3$ et $m = 3$, aequatio generalis transmutatur in

$$n\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = (n-2)\int\frac{x^{n-3}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - x^{n-2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2}.$$

Cognito igitur integrali $\int\frac{x^{n-3}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, innumera alia ab eo derivantur. Quo autem horum integralium inter se relatio clarius perspiciatur, tres casus $n = 3p$, $3p-1$, $3p-2$ distinguendi sunt, quos seorsim tractare conveniet.

Evolutio casus $n = 3p$.

§. 9. Hoc casu habebimus:

$$\int \frac{x^{3p}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \frac{3p-2}{3p}\int \frac{x^{3p-3}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \frac{x^{3p-2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2}}{3p} + \text{Const.}$$

Si nunc litterae p successive valores 1, 2, 3, etc. tribuamus, sequentes orientur integrationes:

$$\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{1}{3}\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \tfrac{1}{3}x\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C,$$

$$\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{4}{6}\int \frac{x^3\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \tfrac{1}{6}x^4\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C', \text{ vel}$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\right) + C',$$

$$\int \frac{x^9\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{7}{9}\int \frac{x^6\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \tfrac{1}{9}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C'', \text{ vel}$$

$$= \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{7}{9}\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{7}{9} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{4}{6}\right) + C'',$$

$$\int \frac{x^{12}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{10}{12}\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$

$$- \sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\tfrac{1}{12} + \tfrac{1}{9}\cdot\tfrac{10}{12} + \tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{10}{12}\cdot\tfrac{7}{9} + \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{10}{12}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{4}{6}\right) + C'''$$

etc.

quarum progressionum legem sub hac forma generali complectimur:

$$\int \frac{x^{3p}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{7}{9}\cdots\cdots\frac{3p-2}{3p}\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$$
$$-\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\,[\tfrac{1}{3p}+\frac{1}{3(p-1)}\cdot\frac{3p-2}{3p}+\frac{1}{3(p-2)}\cdot\frac{3p-2}{3p}\cdot\frac{3p-5}{3p-3}$$
$$+\frac{1}{3(p-3)}\cdot\frac{3p-2}{3p}\cdot\frac{3p-5}{3p-3}\cdot\frac{3p-8}{3p-6}$$
$$+\frac{1}{3(p-4)}\cdot\frac{3p-2}{3p}\cdot\frac{3p-5}{3p-3}\cdot\frac{3p-8}{3p-6}\cdot\frac{3p-11}{3p-9}\cdots\cdots$$
$$+\frac{1}{3(p-(p-1))}\cdot\frac{3p-2}{3p}\cdot\frac{3p-5}{3p-3}\cdots\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{4}{6}]+C.$$

Hoc modo integrale $\int\frac{x^{3p}\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ ad integrale $\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ perductum est, quod obtinetur ponendo $\frac{x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=v$; fiet enim $\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\frac{\partial v}{1+v^3}$, hinc $\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}=\int\frac{\partial v}{1+v^3}$. Cum vero expressio $\frac{\partial v}{1+v^3}$ ab omni irrationalitate liberata sit, ejus integrale facillime exhiberi potest, atque ita sumi debet, ut posito $v=0$ evanescat, quia pro $x=0$, $v=0$ evadit.

§. 10. Si integralia $\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, $\int\frac{x^3\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, etc. ita sumantur, ut facto $x=0$ evanescant, deinde vero $x=1$ accipiatur, id est, si eorum valores $\left[{ab\ x=0 \atop ad\ x=1}\right]$ extendantur, ob constantem, quae est

$$=\tfrac{1}{3p}+\frac{1}{3(p-1)}\cdot\frac{3p-2}{3p}+\frac{1}{3(p-2)}\cdot\frac{3p-2}{3p}\cdot\frac{3p-5}{3p-3}\text{ etc.}$$

habebimus:

$$\int \frac{x^{3p}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{7}{9}\cdots\tfrac{3p-2}{3p} \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}\,,$$

vel, cum $\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{smallmatrix}\right]$ sit $= \frac{1}{3}\cdot\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ *), denotante π peripheriam circuli, cujus diameter $= 1$,

$$\int \frac{x^{3p}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{smallmatrix}\right] = \tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{4}{6}\cdot\tfrac{7}{9}\cdots\tfrac{3p-2}{3p}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Evolutio casus $n = 3p - 1$.

§. 11. Hoc casu aequatio superior induet hanc formam:

$$(3p-1)\int \frac{x^{3p-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = 3(p-1)\int \frac{x^{3p-4}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - x^{3(p-1)}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C,$$

ex qua, posito $p = 1, 2, 3$ etc. sequentes prodeunt valores:

$$\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\tfrac{1}{2}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C,$$

$$\int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = \tfrac{3}{5}\int \frac{x^2\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} - \tfrac{1}{5}x^3\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C', \text{ vel}$$

$$= -\tfrac{1}{5}x^3\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C',$$

$$\int \frac{x^8\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\tfrac{1}{8}x^6\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{6}{8}x^3\sqrt[3]{(1-x^3)^2} - \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{6}{8}\cdot\tfrac{3}{5}\sqrt[3]{(1-x^3)^2} + C'',$$

$$\int \frac{x^{11}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\tfrac{x^9}{11} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{9}{11}x^6 + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{9}{11}\cdot\tfrac{6}{8}x^3 + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{9}{11}\cdot\tfrac{6}{8}\cdot\tfrac{3}{5}x^0\right) + C''',$$

*) Acta Acad. Imp. Sc. T. I. P. II. pag. 12. §. 15.

$$\int \frac{x^{14}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = -\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\frac{x^{12}}{14} + \frac{1}{11}\cdot\frac{12}{14}x^9 + \frac{1}{8}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{9}{11}x^6 + \frac{1}{5}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{6}{8}x^3 + \frac{1}{2}\cdot\frac{12}{14}\cdot\frac{9}{11}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}\right) + C^{IV},$$

etc.

cujus integralis lex generalis ita repraesentabitur:

$$\int \frac{x^{3p-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} =$$

$$-\sqrt[3]{(1-x^3)^2}\left(\frac{x^{3(p-1)}}{3p-1} + \frac{1}{3p-4}\cdot\frac{3p-3}{3p-1}x^{3(p-2)} + \frac{1}{3p-7}\cdot\frac{3p-3}{3p-1}\cdot\frac{3p-6}{3p-4}x^{3(p-3)} + \frac{1}{3p-10}\cdot\frac{3p-3}{3p-1}\cdot\frac{3p-6}{3p-4}\cdot\frac{3p-9}{3p-7}x^{3(p-4)} \ldots\ldots + \frac{1}{3p-(3p-2)}\cdot\frac{3p-3}{3p-1}\cdot\frac{3p-6}{3p-4}\cdots\cdots\frac{6}{8}\cdot\frac{3}{5}x^0\right) + C.$$

§. 11. Pro $x = 0$ hoc integrale evadit

$$0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{3p-3}{3p-1} + C,$$

ergo $C = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdots\cdots\frac{3p-3}{3p-1}$, et pro $x = 1$ habemus

$$\int \frac{x^{3p-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} = C, \text{ quare erit}$$

$$\int \frac{x^{3p-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}} \left[\begin{matrix} ab\ x=0 \\ ad\ x=1 \end{matrix}\right] = C = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{6}{8}\cdots\frac{3p-3}{3p-1}.$$

§. 12. Dignum est notatu, valorem generalem integralis $\int \frac{x^{3p-1}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ per quantitates mere algebraïcas exprimi.

Evolutio casus $n = 3p - 2$.

§. 13. Eodem prorsus modo, quo hactenus usi sumus,

integratio formulae $\int \frac{x^{3p-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ ad integrale $\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$, vel ad $\int \frac{\partial x}{x^2 \sqrt[3]{(1-x^3)}}$, reducitur, cujus autem valorem neque algebraïce neque per logarithmos, vel arcus circulares, exprimi posse jam dudum cognitum est. Quotiescunque igitur integrale formae $\int \frac{x^{3p-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ occurrit, certi esse possumus, id nullo modo absolute exhiberi posse, quoniam ad integrale $\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ reductibile est, quod peculiare quantitatum transcendentium genus involvit.

§. 14. Vix observare necesse erit, exemplum modo prolatum objectionem *Lambertinam* §. 1. penitus refutare. Tametsi enim nulla patet via, termini generalis integrale $\int \frac{x^n\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ eruendi, attamen casus speciales $n = 3p$, et $n = 3p - 1$, per methodum a nobis traditam elegantissime absolvuntur; quod autem valores ipsius n in forma $3p-2$ contentos attinet, eadem methodus docet, quod diem et operam perdituri essemus, si integrale $\int \frac{x^{3p-2}\,\partial x}{\sqrt[3]{(1-x^3)}}$ sive

per quantitates algebraïcas, sive per arcus circulares, vel logarithmos, exprimere tentaremus.

Exemplum secundum.

§. 15. Ponamus $m = 4$, $a = -1$, $b = 2$, $q = 0$, $\nu = 2$. Pro hoc casu formula generalis evadit:

$$\int \frac{x^n \partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{x^{n-1}\sqrt[4]{(2x^2-1)^3} + (n-1)\int \frac{x^{n-2}\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}}{2n+1},$$

ubi iterum duo casus, scilicet $n = 2p + 1$, et $n = 2p$, a se invicem distinguendi et seorsim examinandi occurrunt.

Integratio formulae $\int \frac{x^{2p+1}\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$.

Si $n = 2p + 1$ ponitur, erit

$$\int \frac{x^{2p-1}\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{x^{2p}\sqrt[4]{(2x^2-1)^3} + 2p\int \frac{x^{2p-1}\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}}{4p+3} + C,$$

ex qua formula, si litterae p successive valores 0, 1, 2, 3 etc. tribuantur, abstractione facta a constante addenda, sequentia deducuntur integralia:

$$\int \frac{x\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}}{3},$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{(x^2+\frac{2}{3})\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}}{7},$$

$$\int \frac{x^5\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{(x^4+\frac{4}{7}x^2+\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{3}x^0)\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}}{11},$$

$$\int \frac{x^7\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} = \frac{(x^6+\frac{6}{11}\cdot x^4+\frac{6}{11}\cdot\frac{4}{7}x^2+\frac{6}{11}\cdot\frac{11}{7}\cdot\frac{2}{3}x^0)\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}}{15},$$

et generaliter:

$$\int \frac{x^{2p+1}\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} =$$

$$\frac{\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}[x^{2p}+\frac{2p}{4p-1}x^{2p-2}+\frac{2p(2p-2)}{(4p-1)(4p-5)}x^{2p-4}+\frac{2p(2p-2)(2p-4)}{(4p-1)(4p-5)(4p-9)}x^{2p-6}+\text{etc.}]}{4p+3};$$

ubi ultimus numeratoris terminus exstat $=\frac{2p\cdot(2p-2)\ldots\ldots4.2.x^0}{(4p-1)(4p-5)\ldots7\cdot3}$.

§. 16. Integratio formulae $\int \frac{x^{2p}\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$,

in qua p numerum quemcunque positivum et integrum, unitate non minorem, denotat.

Per operationes prioribus similes perducimur ad integrale:

$$\int\frac{x^{2p}\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}} =$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\,\ldots(2p-1)}{5\cdot9\cdot13\cdot17\ldots(4p+1)}\int\frac{\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$$

$$+\sqrt[4]{(2x^2-1)^3}\,\frac{\left[x^{2p-1}+\frac{2p-1}{4p-3}x^{2p-3}+\frac{(2p-1)(2p-3)}{(4p-3)(4p-7)}x^{2p-5}\ldots+\frac{(2p-1)(2p-3)\ldots3x}{(4p-3)(4p-7)\ldots5}\right]}{4p+1}.$$

Pendet igitur integratio $\int\frac{x^{2p}\,\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$ ab integratione $\int\frac{\partial x}{\sqrt[4]{(2x^2-1)}}$.

Exemplum tertium.

§. 17. Sint $m=2$, $q=0$, $a=1$, $b=-1$, $\nu=4$, et formula §. 7. induet hanc formam:

$$(n-1)\int\frac{x^n\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}=(n-3)\int\frac{x^{n-4}\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}-x^{n-3}\sqrt{(1-x^4)}+C.$$

Ex hac aequatione deducimus sequentes integrationes:

1) Si $n=1$, erit $\int\frac{\partial x}{x^3\sqrt{(1-x^4)}}=-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{(1-x^4)}}{x^2}$.

2) Si $n=-3$, erit $\int\frac{\partial x}{x^7\sqrt{(1-x^4)}}=-\frac{4}{6}\int\frac{\partial x}{x^7\sqrt{(1-x^4)}}+\frac{1}{6}\frac{\sqrt{(1-x^4)}}{x^6}$,

vel $\int\frac{\partial x}{x^7\sqrt{(1-x^4)}}=-\sqrt{(1-x^4)}\left(\frac{1\cdot4}{2\cdot6}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6}\right)$.

3) Si $n=-7$, obtinetur

$$\int\frac{\partial x}{x^{11}\sqrt{(1-x^4)}}=-\sqrt{(1-x^4)}\left(\frac{8}{10}\cdot\frac{4}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2}+\frac{8}{10}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{x^6}+\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x^{10}}\right),$$

et generaliter

4) $\int \frac{\partial x}{x^{4p+3} \sqrt{(1-x^4)}} =$

$-\sqrt{(1-x^4)}\left[\frac{1}{2(2p+1)x^{4p+2}} + \frac{1}{2(2p-1)} \cdot \frac{4p}{4p+2} \cdot \frac{1}{x^{4p-2}} + \frac{1}{2(2p-3)} \cdot \frac{4p}{4p+2} \cdot \frac{4p-4}{4p-2} \cdot \frac{1}{x^{4p-6}}\right.$
$\left. + \frac{1}{2(2p-5)} \cdot \frac{4p}{4p+2} \cdot \frac{4p-4}{4p-2} \cdot \frac{4p-8}{4p-6} \cdot \frac{1}{x^{4p-10}} \ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2} \cdot \frac{4p}{4p+2} \cdot \frac{4p-4}{4p-2} \ldots\ldots \frac{4}{6} \cdot \frac{1}{x^2}\right] + \text{Const.}$

Concludimus igitur, integrale $\int \frac{\partial x}{x^n \sqrt{(1-x^4)}}$ per seriem finitam et algebraïce exprimi posse, si n fuerit numerus formae $4p + 3$.

5) Si in aequatione $(n-1) \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = (n-3) \int \frac{x^{n-4} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} - x^{n-3} \sqrt{(1-x^4)}$ sumitur $n = 4$, habebimus:

$$3 \int \frac{x^n \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} - x \sqrt{(1-x^4)}.$$

Hoc integrale absolute exhiberi nequit, exprimit enim $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ arcum curvae elasticae, neque algebraïce, neque per logarithmos vel arcus circulares assignabilem. Quare et omnia integralia formae $\int \frac{x^{4p} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, quia ad $\int \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ reduci possunt, absolute exhiberi nequeunt. Idem valet de integralibus formae $\int \frac{x^{4p+2} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, quippe quae ad integrale $\int \frac{x^2 \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ reducuntur, quod applicatam ejusdem curvae exprimit.

6) Sit $n = 4p + 1$, hoc casu erit:

$$4p \int \frac{x^{4p+1} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = (4p-2) \int \frac{x^{4p-3} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} - x^{4p-2} \sqrt{(1-x^4)}.$$

Quod si nunc pro p numeros naturales 1, 2, 3 etc. ponamus, legem relationis integralium $\int \frac{x^{4p+1} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ et $\int \frac{x^{4p-3} \partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$, hoc modo exprimi posse facillime cognoscimus:

$$\int \frac{x^{4p+1}\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{12}\cdots\frac{4p-2}{4p}\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$$
$$-\sqrt{(1-x^4)}\left[\frac{x^{4p-2}}{4p}+\frac{1}{4(p-1)}\cdot\frac{4p-2}{4p}x^{4p-6}+\frac{1}{4(p-2)}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}x^{4p-10}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4(p-3)}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}\cdot\frac{4p-10}{4p-8}x^{4p-14}\cdots\cdots+\frac{1}{4}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}\cdots\frac{10}{12}\cdot\frac{6}{8}x^2\right]+C.$$

Quo jam integrale $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}}$ determinemus, statuamus $\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^4)}} = z^2$, hinc $\partial x = \frac{1}{2}\frac{\partial z}{\sqrt{z}\sqrt{(1+z^2)}\sqrt[4]{(1+z^2)^3}}$; quare $\int\frac{x\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \int\frac{x^2\partial x}{x\sqrt{(1-x^4)}} = z\frac{\partial x}{x} = \frac{1}{2}\int\frac{\partial z}{1+z^2} = \frac{1}{2}$ Arc. tang. $z = \frac{1}{2}$ Arc. tang. $\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^4)}}$. Substituto hoc valore in expressione praecedente, prodibit hoc integrale:

$$\int\frac{x^{4p+1}\partial x}{\sqrt{(1-x^4)}} = \frac{2}{4}\cdot\frac{6}{8}\cdot\frac{10}{12}\cdots\cdots\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{1}{2}\text{ Arc. tang. }\frac{x^2}{\sqrt{(1-x^4)}}$$
$$-\sqrt{(1-x^4)}\left[\frac{x^{4p-2}}{4p}+\frac{1}{4(p-1)}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot x^{4p-6}+\frac{1}{4(p-2)}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}x^{4p-10}\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4(p-3)}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}\cdot\frac{4p-10}{4p-8}x^{4p-14}\cdots\cdots+\frac{1}{4}\cdot\frac{4p-2}{4p}\cdot\frac{4p-6}{4p-4}\cdots\frac{10}{12}\cdot\frac{6}{8}x^2\right]+\text{Const.}$$

§. 18. Haec ad illustrandam solutionem §. 7. sufficient. Quo autem praestantia methodi a nobis traditae ulterius eluceat, alias series, ab illa, qua hucusque usi sumus, diversas, consideremus, quem in finem sequentia solvemus problemata.

Problema.

§. 19. Integrale $\int\frac{\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[\begin{smallmatrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{smallmatrix}\right]$ extensum ab illust. *L. Eulero* *) $= -\frac{\pi}{2}\log. 2$ exhibitum est, denotante π pe-

*) V. Acta Acad. Imp. Petrop. T. 1. P. II. De Integratione formulae $\int\frac{\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}\left[\begin{smallmatrix}ab\ x=0\\ ad\ x=1\end{smallmatrix}\right]$ extensa. Auct. *L. Eulero.*

ripheriam circuli, cujus diameter $= 1$. Quaeritur, quaenam alia integralia ab eo deduci possint?

Solutio:

Spectemus integrale cognitum tanquam primum terminum hujus seriei:

$$\frac{\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \frac{x\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}, \quad \frac{x^2\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} \;\ldots\; \frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}},$$

ac sit terminus generalis $\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \partial P$. Ponamus porro, brevitatis causa, $\sqrt{(1-x^2)} = y$, $R = \frac{1}{m} x^m y$, et $S = R \log. x$. His praemissis erit $\partial R = x^{m-1} y\partial x - \frac{x^{m+1}\partial x}{my}$, et $\partial S = x^{m-1} y \log. x\partial x - \frac{x^{m+1}}{m}\frac{\partial x \log. x}{y} + \frac{1}{m} x^{m-1} y\partial x$, vel

$$\partial S = \partial P - x^2\partial P - \frac{x^{m+1}\partial x \log. x}{my} + \frac{1}{m} x^{m-1} y\partial x,$$

quae aequatio integrata evadit:

$$\int\frac{x^{m+1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m}{m+1}\int\frac{x^{m-1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$+ \frac{1}{m+1}\int x^{m-1}\sqrt{(1-x^2)}\,\partial x - \frac{x^m}{m+1}\sqrt{(1-x^2)}\log. x + \text{Const.}$$

Hic iterum necesse est casus $m = 2p$ et $m = 2p+1$ seorsim tractare.

Evolutio casus $m = 2p$.

§. 20. Hoc casu habemus:

$$\int\frac{x^{2p+1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2p}{2p+1}\int\frac{x^{2p-1}\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$+ \frac{1}{2p+1}\int x^{2p-1}\sqrt{(1-x^2)}\,\partial x - \frac{x^{2p}}{2p+1}\sqrt{(1-x^2)}\log. x + C.$$

Inde eliciemus sequentia integralia:

1) Sumamus $p = 0$, proinde

$$\int\frac{x\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int\frac{\sqrt{(1-x^2)}\partial x}{x} - \sqrt{(1-x^2)}\log. x + C,$$

vel ob $\int \frac{\sqrt{(1-x^2)}\,\partial x}{x} = \sqrt{(1-x^2)} + \log. \frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}$ erit

$$\int \frac{x\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = (1 - \log. x)\sqrt{(1-x^2)} + \log. \frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}} + C.$$

Quod si nunc hoc integrale ita sumatur, ut pro $x = 0$ evanescat, deinde vero $x = 1$ ponatur, id est si ejus valorem $\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$ extendamus, altera harum suppositionum dabit $C = -1 + \log. 2$, altera vero transmutat integrale $(1-\log. x)\sqrt{(1-x^2)} + \log. \frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}} + C$ in C, per consequens erit:

$$\int \frac{x\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = C = \log. 2 - 1.$$

Eundem valorem celeb. *L. Eulerus* loco citato per methodum ab hac maxime diversam invenit.

2) Si $p = 1$, aequatio nostra, ad hunc casum accommodata, fiet

$$\int \frac{x^3\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \tfrac{2}{3}\int \frac{x\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \tfrac{1}{3}\int x\sqrt{(1-x^2)}\,\partial x$$
$$- \tfrac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)}\log. x + \text{Const.}, \text{ vel}$$

$$\int \frac{x^3\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \tfrac{2}{3}(1-\log. x)\sqrt{(1-x^2)} + \tfrac{2}{3}\log. \frac{x}{1+\sqrt{(1-x^2)}}$$
$$- \tfrac{1}{9}(1-x^2)\sqrt{(1-x^2)} - \tfrac{1}{3}x^2\sqrt{(1-x^2)}\log. x + C,$$

cujus integralis valor $\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$ extensus, est

$$= -\tfrac{2}{3}\left(\tfrac{5}{6} - \log. 2\right).$$

Simili modo erit:

$$\int \frac{x^5\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \tfrac{4}{5}\int \frac{x^3\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{3}\sqrt{(1-x^2)^3} + \tfrac{1}{5}\cdot\tfrac{1}{5}\sqrt{(1-x^2)^5}$$
$$- \tfrac{x^4}{5}\sqrt{(1-x^2)}\log. x + \text{Const.}, \text{ hinc}$$

$$\int \frac{x^5\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = -\tfrac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\left(\tfrac{47}{60} - \log. 2\right).$$

Haec integralia, nec non omnia reliqua formae $\int \frac{x^{2p+1}\,\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}$,

quae ab integrali $\int \frac{x \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ per methodum nostram deducuntur, egregie cum *Eulerianis* conveniunt.

Evolutio casus $n = 2p + 1$.

§. 21. Aequatio generalis, posito $n = 2p + 1$, abit in:

$$\int \frac{x^{2p+2} \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2p+1}{2p} \int \frac{x^{2p} \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}}$$

$$+ \frac{1}{2p+2} \int x^{2p} \sqrt{(1-x^2)} \partial x - \frac{x^{2p+1}}{2p+2} \sqrt{(1-x^2)} \log. x + C,$$

ex qua sequentes deducimus solutiones speciales:

1) Si $p = 0$, habebimus:

$$\int \frac{x^2 \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{1}{2} \frac{\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} + \frac{1}{2} \int \sqrt{(1-x^2)} \partial x - \frac{1}{2} x \sqrt{(1-x^2)} \log. x + C.$$

Sed integrale:

$$\int \frac{\partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = - \frac{\pi}{2} \log. 2,$$

et $\int \sqrt{(1-x^2)} \partial x$, ad eosdem terminos extensum, est area quadrantis circuli, cujus diameter $= 1$, id est $\int \sqrt{(1-x^2)} \partial x = \frac{\pi}{4}$; hinc erit

$$\int \frac{x^2 \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = - \frac{\pi}{2} (\log. 2 - \tfrac{1}{2}).$$

2) Ex hoc integrali iterum deducitur:

$$\int \frac{x^4 \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{3}{4} \int \frac{x^2 \partial x \log. x}{\sqrt{(1-x^4)}}$$

$$+ \frac{1}{4} \int x^2 \partial x \sqrt{(1-x^2)} - \frac{1}{4} x^3 \sqrt{(1-x^2)} \log. x + C,$$

cujus valor $\left.\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$ extensus, est $= - \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{\pi}{2} (\log. 2 - \frac{7}{12})$ et sic in infinitum.

Problema.

§. 22. Cognito valore integralis $\int \frac{\partial x \log. x}{1+x} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = - \frac{\pi^2}{12}$, innumera alia invenire integralia, quae ab eo deduci possunt.

Solutio:

Consideremus seriem $\int\frac{\partial x \log x}{1+x}$, $\int\frac{x\partial x \log. x}{1+x} \ldots \int\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{1+x}$, $\int\frac{x^n \partial x \log. x}{1+x}$, cujus primus vel simplicissimus terminus est integrale datum; tum posito, ut supra, $\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{1+x} = \partial P$, et $\frac{x^n}{n}\log. x = R$, prodibit $x^{n-1}\partial x \log. x = \partial P + x\partial P$, vel $\partial R - \frac{1}{n}x^{n-1}\partial x = \partial P + x\partial P$, et $\partial R = \frac{1}{n}x^{n-1}\partial x + \partial P + x\partial P$, hinc integrando $R = \frac{1}{n^2}x^n + P + \int x\partial P + C$, scilicet

$$\int\frac{x^n\partial x \log. x}{1+x} = \left(\frac{n \log. x - 1}{n^2}\right)x^n - \int\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{1+x} + C, \text{ et}$$

$$n^2\int\frac{x^n\partial x \log. x}{1+x} = (n \log. x - 1)x^n - n^2\int\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{1+x} + C.$$

Posito jam $n = 0$, nanciscimur $C = 1$, quare

$$\int\frac{x^n\partial x \log. x}{1+x} = \left(\frac{n \log. x - 1}{n^2}\right)x^n - \int\frac{x^{n-1}\partial x \log. x}{1+x} + \frac{1}{n^2}.$$

§. 23. Haec aequatio sequentes nobis praebet integrationes:

1) Si $n = 1$, notum est esse *) $\int\frac{\partial x \log. x}{1+x}\left[\begin{smallmatrix}ab\ x = 0\\ ad\ x = 1\end{smallmatrix}\right] = -\frac{\pi^2}{12}$, quapropter

$\int\frac{x\partial x \log. x}{1+x}$ ad eosdem terminos extensum $= -\int\frac{\partial x \log. x}{1+x} = +\frac{\pi^2}{12}$.

2) Si $n = 2$, consequimur $\int\frac{x^2\partial x \log. x}{1+x} = -\int\frac{x\partial x \log. x}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}$ etc.

§. 24. Cum solutio praecedens ad integrale $\int\frac{\partial x \log. x}{1+x}$ perducta sit, cujus valor, si quidem $\left[\begin{smallmatrix}ab\ x = 0\\ ad\ x = 1\end{smallmatrix}\right]$ extendatur,

---

*) V. Nov. Comment. Tom. XIX. De vero valore formulae integralis $\int\frac{z^m \quad 1 + z^n \quad m - 1}{1 + z^m}\partial z$, casu quo post integrationem $z = 1$ ponitur. Auct. *L. Eulero*, pag. 39.

est $= -\frac{\pi^2}{12}$, non abs re fore existimo, si hoc idem integrale, de quo *Eulerus* citato loco pag. 39. affirmat, neminem hucusque methodo directa ostendisse, esse $\int \frac{\partial x \log. x}{1+x} = -\frac{\pi^2}{12}$, alia quam magnus iste Geometra ingressus est via, hac occasione breviter exhibeam.

Ponatur igitur $\frac{\partial x \log. x}{1+x} = \partial y$, et $y = \log.(1+x)\log. x - z$, ultima haec aequatio differentiata praebet:

$$\partial y = \frac{\partial x \log. x}{1+x} - \frac{\partial x}{x}\log.(1+x) - \partial z,$$

proinde $\partial z = \frac{\partial x}{x}\log.(1+x)$. Cum vero

$\log.(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{etc.}$, habebimus

$\partial z = \partial x - \frac{x\partial x}{2} + \frac{x^2\partial x}{3} - \frac{x^4\partial x}{4} + \text{etc.}$, et integrando:

$z = x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} + \frac{x^4}{16} + \text{etc.}$ hinc

$y = \int \frac{\partial x \log. x}{1+x} = \log.(1+x)\log. x - (x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \text{etc.}) + \text{Const.}$ cujus integralis valor $\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$ extensus, evidenter est $= -(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \text{etc.})$, quae series illa est notissima, quam *Eulerus* primus demonstravit esse $= \frac{\pi^2}{12}$. Consequenter integrale $\int \frac{\partial x \log. x}{1+x} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = -\frac{\pi^2}{12}$.

§. 25. Finem hic facimus observationibus circa praestantiam methodi a nobis expositae, integralia quaedam ab aliis deducendi. Quae adhuc supersunt, praecipue de expressionibus, quarum integratio a duobus pluribusve integralibus cognitis pendet, ad aliud tempus reservaturi.

SUMMATIO
INNUMERABILIUM SERIERUM, EX PRINCIPIIS CALCULI INTEGRALIS PETITA.

AUCTORE

C. F. KAUSLER.

Conventui exhib. die 5 Octobris 1808.

§. 1. Si elementum aliquod differentiale ejusmodi est, ut ejus integrale vel algebraïce exhibeatur, vel etiam per logarithmos, aut arcus circulares, atque si idem integrale per seriem infinitam possit repraesentari, constat ex hoc duplici operandi modo, summationem seriei illius infinitae emergere. Huc spectant etiam sequentes investigationes, quas, quia memorabilium quarundam serierum summam offerre mihi videbantur, communicare cum Academia ausus sum.

§. 2. Primum elementum, quod isto modo evolvere lubet, sequens esto: $\partial y = e^x x^m \partial x$, existente m integro et positivo numero, e autem basi systematis logarithmorum hyperbolici. Jam vero elementi hujus integrale primo finite exhibeamus, et postea per seriem. Sit igitur $y = e^x x^m + p$, hinc erit $\partial y = e^x x^m \partial x + m e^x x^{m-1} \partial x + \partial p$,

et $\partial p = - m e^x x^{m-1} \partial x$; unde sit porro $p = - m e^x x^{m-1} + q$, et $\partial p = - m e^x x^{m-1} \partial x - m(m-1) e^x x^{m-2} \partial x$, ex quo fit $q = m(m-1) e^x x^{m-2} + r$ etc. Obtinemus igitur:

$$y = e^x [x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - m(m-1)(m-2) x^{m-3} + \ldots \pm m(m-1) m-2) \ldots 1] + \text{Const.}$$

ubi signum + vel − valet pro numero m vel pari vel impari. Hanc seriem pro m integro positivo numero abrumpi, certum est. Ad constantem determinandam, sumatur $y = 0$ pro $x = 0$, unde fit Const. $= \mp m(m-1)(m-2) \ldots 1$. Est igitur integrale completum ipsius $e^x x^m \partial x =$

$$e^x [x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} - \ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots 1] \mp m(m-1)(m-2) \ldots 1,$$

hinc $\int e^x x^m \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= e[1 - m + m(m-1) - m(m-1)(m-2) \ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots 1] \mp m(m-1)(m-2) \ldots 1.$$

Jam vero $\int e^x x^m \partial x$ quaeramus per seriem.

Est $e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots$ hinc

$$e^x x^m \partial x = x^m \partial x + x^{m+1} \partial x + \frac{x^{m+2} \partial x}{1.2} + \frac{x^{m+3} \partial x}{1.2.3} + \frac{x^{m+4} \partial x}{1.2.3.4} + \ldots$$ Igitur

$$\int e^x x^m \partial x = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{1.2(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{1.2.3.(m+4)} + \ldots + \text{Const.}$$

Supposito, ut supra, $y = 0$ pro $x = 0$, erit hoc casu Const. $= 0$, atque integrale completum:

$$\int e^x x^m \partial x = x^m \left[\frac{x}{m+1} + \frac{x^2}{1.(m+2)} + \frac{x^3}{1.2.(m+3)} + \frac{x^4}{1.2.3.(m+4)} + \ldots\right].$$

Est igitur $\int e^x x^m \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{1.2.(m+3)} + \frac{1}{1.2.3.(m+4)} + \frac{1}{1.2.3.4.(m+4)} + \ldots$$

Hinc ob aequalitatem utriusque pro $\int e^x x^m \partial x$ inventi valoris est:

$$e[1 - m + m(m-1) - m(m-1)(m-2) + \ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots]$$
$$\mp m(m-1)(m-2) \ldots 1$$
$$= \frac{1}{m+1} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{m+2} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{m+3} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{m+4} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{m+5} + \ldots$$

quae igitur series per terminum finitum habetur.

Forma $\int e^{-x} x^m \partial x$ similiter tractata offert:

$$-\frac{1}{e}[1 + m + m(m-1) + m(m-1)(m-2) + \ldots + m(m-1)(m-2) \ldots 1]$$
$$+ m(m-1)(m-2) \ldots 1$$
$$= \frac{1}{m+1} - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{m+2} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{m+3} - \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{m+4} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{m+5} - \ldots$$

§. 3. Ex generali forma casus speciales deducimus sequentes:

1°. Si $m = 1$, est $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{5} + \ldots$ unde

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{6} + \ldots$$

Occurrit haec series dudum nota in *Euleri* introductione in Anal. Inf., sed ex alio principio derivata.

2°. Sit $m = 2$, eritque generalis series istius formae:

$e - 2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$ hinc

$$e - (2 + \tfrac{1}{3}) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{1.2.3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$$

3°. Sit $m = 3$, unde fit:

$$2(3 - e) = \frac{1}{4} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{8} + \ldots$$

§. 4. Transeamus ad integralia hujus formae: $\int \partial x \int e^x x^m \partial x$, posito primum $m = 1$, quo casu supra repertum fuit $\int e^x x \partial x = e^x x - e^x + 1$, hinc

$$\partial x \int e^x x \partial x = e^x x \partial x - e^x \partial x + \partial x,$$

atque $\int \partial x \int e^x x \partial x = e^x x - 2 e^x + \text{Const.}$ quod integrale, si evanescere debeat pro $x = 0$, erit Const. $= 2$, atque

$$\int \partial x \int e^x x \partial x = e^x x - 2 e^x + x + 2, \text{ hinc}$$

$$\int \partial x \int e^x x \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = 3 - e.$$

Jam vero, serie adhibita, est

$$\partial x \int e^x x \partial x = \frac{x^2 \partial x}{2} + \frac{x^3 \partial x}{1 \cdot 3} + \frac{x^4 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{x^5 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5} + \ldots \text{ et}$$

$$\int \partial x \int e^x x \partial x = \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots$$

hinc sequitur fore:

$$\int \partial x \int e^x x \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{1}{6} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \ldots$$

Est igitur:

$$3 - \left(\tfrac{1}{6} + e\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} + \ldots$$

Forma $\int \partial x \int e^{-x} x \partial x$ simili prorsus modo tractanda est:

2°. Sit nunc $m = 2$, eritque:

$$\int e^x x^2 \partial x = e^x x^2 - 2 e^x x + 2 e^x - 2, \text{ hinc}$$

$$\partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x x^2 \partial x - 2 e^x x \partial x + 2 e^x \partial x - 2 \partial x,$$

et $\int \partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x x^2 - 4 e^x x + 6 e^x - 2x - 4 + \text{Const.},$

et Const. $= -2$, ergo $\int \partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x [x - 4x + 6] - 2x - 6$, ergo $\int \partial x \int e^x x^2 \partial x \left[{ab\ x = 0 \atop ad\ x = 1} \right] = 3e - 8$. Sed est item

$$\int \partial x \int e^x x^2 \partial x = \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$

ergo $\int \partial x \int e^x x^2 \partial x \left[{ab\ x = 0 \atop ad\ x = 1} \right]$

$$= \frac{1}{12} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} + \ldots$$

hincque

$$3e - (8 + \tfrac{1}{12}) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} + \ldots$$

§. 5. Eadem autem via pro $\int \partial x \int e^x x^3 \partial x$, nec non pro $\int \partial x \int e^x x^4 \partial x$ etc. reperimus:

$$30 - (\tfrac{1}{20} + 11e) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10} + \ldots$$ atque

$$53e - (144 + \tfrac{1}{30}) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{7 \cdot 8} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{8 \cdot 9} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{9 \cdot 10} + \ldots$$

quarum serierum valor igitur ex §. 2. facillime obtinetur. Summabiles ergo sunt omnes formae sequentes:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(m+3)(m+4)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(m+4)(m+5)} + \ldots$$

quippe summa est $= \int \partial x \int e^x x^m \partial x$, ubi quidem

$$\int e^x x^m \partial x \ (\S.\ 2.) = e^x [x^m - m x^{m-1} + m(m-1) x^{m-2} \ldots \pm m(m-1)(m-2) \ldots 1) \mp m(m-1)(m-2) \ldots 1,$$

ut nempe summa per e et m data sit.

§. 6. Ex $\int \partial x \int e^x x^m \partial x$ autem, similiter operando, deducitur $\int \partial x \int \partial x \int e^x x^m \partial x$, quod novas summationes offert.

Sic est per §. 4, posito $m = 1$,

$$\int \partial x \int e^x x \partial x = e^x x - 2 e^x + x + 2,$$ hinc

$$\partial x \int \partial x \int e^x x \partial x = e^x x \partial x - 2 e^x \partial x + x \partial x + 2 \partial x,$$ atque

$$\int \partial x \int \partial x \int e^x x \partial x = e^x x - 3 e^x + \tfrac{x^2}{2} + 2 x + 1 + \text{Const.}$$

Pro $x = 0$ fit Const. $= 2$, hinc

$$\int \partial x \int \partial x \int e^x x \partial x = e^x (x - 3) + \tfrac{x^2}{2} + 2 x + 3,$$ et $\left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{11}{2} - 2 e.$

Sed per seriem habetur:

$$\partial x \int \partial x \int e^x x \partial x = \frac{x^3 \partial x}{2 \cdot 3} + \frac{x^4 \partial x}{1 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6} + \ldots.$$

hinc

$$\int \partial x \int \partial x \int e^x x \partial x = \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{x^5}{1 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots.$$

ergo $\int \partial x \int \partial x \int e^x x \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots.$$

unde fit $\frac{11}{2} - \left(\frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + 2 e\right) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots.$

Similiter pro $m + 2$, ob

$$\int \partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x x^2 - 4 e^x x + 6 e^x - 2 x + 6,$$ atque

$$\partial x \int \partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x x^2 \partial x - 4 e^x x \partial x + 6 e^x \partial x - 2 x \partial x + 6 \partial x,$$

obtinebimus:

$$\int \partial x \int \partial x \int e^x x^2 \partial x = e^x (x^2 - 6 x + 12) - x^2 - 6 x - 12,$$

hinc idem integrale, ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum, erit $= 7 e - 19$.

Cum autem sit:

$$\partial x \int \partial x \int e^x x^2 \partial x = \frac{x^4 \partial x}{3 \cdot 4} + \frac{x^5 \partial x}{4 \cdot 5} + \frac{x^6 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7 \partial x}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots$$ et

$$\int \partial x \int \partial x \int e^x x^2 \partial x = \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{x^6}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots$$

hoc est (extensum ab $x = 0$ ad $x = 1$)

$$= \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots.$$

habebimus:

$$7e(9 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5}) = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{4 \cdot 5 \cdot 6} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{5 \cdot 6 \cdot 7} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \ldots.$$

Ex his autem certem est, haberi generaliter summam serierum istius formae:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(m+4)(m+5)(m+6)} + \ldots.$$

vel etiam:

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)}$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)} + \ldots\ldots$$

vel adeo

$$\frac{1}{1} \cdot \frac{1}{(m+2)(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)} + \frac{1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{(m+3)(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)}$$
$$+ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{(m+4)(m+5)(m+6)(m+7)(m+8)} + \ldots\ldots \text{ etc.}$$

Quarum igitur serierum summae pendent ab integralibus: $\int \partial x \int \partial x \int \partial x \int e^x x^m \partial x$, $\int \partial x \int \partial x \int \partial x \int \partial x \int e^x x^m \partial x$ etc.

§. 7. Ex superioribus jam directe ad sequentia perducimur: Sit $\partial y = e^x x \partial x + e^{-x} x \partial x$, unde

$$y = e^x x - e^x - e^{-x} x - e^{-x} + 2, \text{ et}$$
$$\int (e^x x \partial x + e^{-x} x \partial x) \left[{ab\ x = 0 \atop ad\ x = 1}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$

Sed per seriem reperietur $\int (e^x x \partial x + e^{-x} x \partial x)$

$$= 2\left(\frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 4} + \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6} + \frac{x^8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8} + \ldots\right) \text{ et}$$

$\left[{}^{ab\ x = 0}_{ad\ x = 1}\right] = 2\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{1.2}\cdot\frac{1}{4} + \frac{1}{1.2.3.4}\cdot\frac{1}{6} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6}\cdot\frac{1}{8} + \ldots\right).$
Ergo haec series est $= 2\,(1 - \frac{1}{e})$.

Similiter posito $\partial y = e^x x \partial x - e^{-x} x \partial x$, erit $y = e^x x - e^x + e^{-x} x + e^{-x}$, ubi $C = 0$; est igitur $\int (e^x x \partial x - e^{-x} x \partial x) \left[{}^{ab\ x = 0}_{ad\ x = 1}\right] = \frac{2}{e}$: et per series idem integrale, ad eosdem terminos extensum, est

$$= 2\left(\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{7} + \ldots\right),\ \text{ergo}$$

$$\frac{1}{e} = \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{1.2.3}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{7} + \frac{1}{1.2.3.4.5.6.7}\cdot\frac{1}{9} + \ldots.$$

Scholium.

§. 8. Tam in hac serie, quam in illa pro $1 - \frac{1}{e}$ inventa, facile, si opus esset, valorem e investigaremus, quia membrum quodvis ex praecedente facillime computatur. Invento quippe membro aliquo $\frac{1}{1.2.3\ldots n}\cdot\frac{1}{n+2} = M$, erit membrum proxime sequens $N = \frac{M}{(n+1)(n+4)}$.

§. 9. Quod si generaliter fuerit $\partial y = e^{mx} x^n \partial x + e^{-mx} x^n \partial x$, posito n numero integro positivo, m autem numero quocunque, obtinebitur:

$$\int e^{mx} x^n \partial x = \frac{e^{mx}}{m}\left[x^n - \frac{n}{n} x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2} x^{n-2} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}\right] \mp \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^{n+1}},$$

ubi valet signum superius vel inferius pro n pari vel impari. Hinc fit $\int e^{mx} x^n \partial x \left[{}^{ab\ x = 0}_{ad\ x = 1}\right]$

$$= \frac{e^m}{m}\left[1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}\right] \mp \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^{n+1}}.$$

Similiter est $\int e^{-mx} x^n \partial x$

$$= -\frac{e^{-mx}}{m}[x^n + \frac{n}{m}x^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}x^{n-2} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}] + \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^{n+1}},$$

unde fit $\int e^{-mx} x^n \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= -\frac{e^{-m}}{n}[1 + \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} + \ldots\ldots + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{m^n}] + \frac{n(n-1)(n-2)\ldots 1}{m^{n+1}},$$

hinc est $\int e^{mx} x^n \partial x + \int e^{-mx} x^n \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= \frac{e^m}{m}[1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} + \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{m^n}] \mp \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{m^{n+1}}$$

$$+ \frac{1}{me^m}[1 + \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{m^3} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{m^n}] + \frac{n(n-1)\ldots\ldots 1}{m^{n+1}}$$

quae expressio abrumpitur pro n positivo et integro.

Jam vero, serie adhibita, habemus $\int e^{mx} x^n \partial x$

$$= \frac{x^{n+1}}{n+1} + \frac{m}{n+2}x^{n+2} + \frac{m^2}{1.2.(n+3)}x^{n+3} + \frac{m^3}{1.2.3.(n+4)}x^{n+4} + \ldots, \text{ et}$$

$$\int e^{-mx} x^n \partial x = \frac{x^{n+1}}{n+2} - \frac{m}{n+2}x^{m+2} + \frac{m^2}{1.2.(n+3)}x^{n+3} - \frac{m^3}{1.2.3.(n+4)}x^{n+4} + \ldots;$$

hinc erit $\int e^{mx} x^n \partial x + \int e^{-mx} x^n \partial x \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right]$

$$= 2\left[\frac{1}{n+1} + \frac{m^2}{1.2} \cdot \frac{1}{n+3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{n+5} + \frac{m^6}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{n+7} + \ldots\right].$$

Ergo expressio finita:

$$\frac{e^m}{m}[1 - \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} \ldots \pm \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}] \mp \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^{n+1}}$$

$$- \frac{1}{me^m}[1 + \frac{n}{m} + \frac{n(n-1)}{m^2} \ldots + \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^n}] + \frac{n(n-1)\ldots 1}{m^{n+1}},$$

aequatur huic seriei infinitae:

$$2\left[\frac{1}{n+1} + \frac{m^2}{1.2} \cdot \frac{1}{n+3} + \frac{m^4}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{n+5} + \frac{m^6}{1.2.3.4.5.6} \cdot \frac{1}{n+7} + \ldots\right].$$

§. 10. Assumto pro n ingenti numero, atque $m = 1$, facillime valor e determinari potest.

§. 11. Elementum $\partial y = e^{mx} x^n \partial x - e^{-mx} x^n \partial x$, pari modo tractatum, offert summam seriei infinitae hujus:

$$2\left[\frac{m}{n+2} + \frac{m^2}{1.2.3}\cdot\frac{1}{n+4} + \frac{m^5}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{n+6} + \ldots\ldots\right].$$

§. 12. Sed ad alias expressiones transeamus, et sit $\partial y = x\,\partial x \log.(1-x)$. Posito jam integrandi causa $1-x=z$, $\partial x = -\partial z$, $x = 1-z$, erit $\partial y = z\partial z \log. z - \partial z \log. z$, hinc $y = z - \frac{z^2}{4} + (\frac{z^2}{2} - z)\log. z + C$. Est autem $C = -\frac{3}{4}$, si simul $y=0$ et $x=0$, ergo

$$y = \int x\,\partial x \log.(1-x) = \frac{(1-x)}{4}[3 + x - 2(1+x)\log.(1-x)] - \frac{3}{4}.$$

At per seriem habemus:

$$\int x\,\partial x \log.(1-x) = \int x\,\partial x\left[-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots\right]$$
$$= -\left[\frac{x^3}{1.3} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^6}{4.6} + \ldots\right],$$

ubi Const. $=0$; est igitur

$$\frac{x^3}{1.3} + \frac{x^4}{2.4} + \frac{x^5}{3.5} + \frac{x^6}{4.6} + \ldots\ldots\ldots = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \frac{(1-x^2)}{2}\log.(1-x).$$

§. 13. Pro casibus specialibus sit $x=1$, hinc erit $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{4.6} + \ldots = \frac{3}{4}$. Porro pro $x = \frac{1}{2}$ fit

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3.5}\cdot\frac{1}{2^2} + \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{2^3} + \frac{1}{5.7}\cdot\frac{1}{2^4} + \ldots = \frac{1}{2}(5 - 6\log.2).$$

Posito $x = \frac{1}{3}$ est

$$\frac{1}{1.3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{3^4} + \frac{1}{3.5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{3^6} + \ldots = \frac{7 + 16\log.2 - 16\log.3}{36}.$$

Denique pro $x = \frac{1}{5}$ emergit:

$$\frac{1}{1.3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{2.4}\cdot\frac{1}{5^4} + \frac{1}{3.5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{4.6}\cdot\frac{1}{5^6} + \ldots = \frac{11 + 96\log.2 - 48\log.5}{100} \text{ etc.}$$

quae quidem expressiones non modo tanquam summationes notatu dignae sunt censendae, sed etiam magnorum numerorum logarithmis reperiendis pares sunt.

§. 14. Obtentis autem seriebus praecedentibus ex $\int x \partial x \log.(1-x)$, operae pretium videtur considerare formam generalem $\partial y = x^m \partial x \log.(1-x)$. Posito igitur $y = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log.(1-x) + p$, erit $\partial y = x^m \partial x \log.(1-x) - \frac{x^{m+1}}{m+1} \cdot \frac{\partial x}{1-x} + \partial p$ et $\partial p = \frac{x^{m+1} \partial x}{(m+1)(1-x)} = -\frac{1}{m+1}[x^m + x^{m-1} + x^{m-2} \ldots + x + 1 - \frac{1}{1-x}]\partial x$, unde $p = -\frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + \log.(1-x)]$, et $y = \int x^m \partial x \log.(1-x) = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log.(1-x) - \frac{1}{m+1} \log.(1-x)$

$$- \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x] + C.$$

Sit hoc integrale $= 0$ pro $x = 0$, eritque $C = 0$, ergo integrale jam completum est. Abrumpitur autem haec series, posito m numero integro positivo, quo casu igitur $\int x^m \partial x \log.(1-x)$ finite exhibetur.

Jam vero est porro

$$x^m \partial x \log.(1-x) = -[x^{m+1} \partial x + \frac{x^{m+2} \partial x}{2} + \frac{x^{m+3} \partial x}{3} + \ldots\ldots].$$

Ergo $\int x^m \partial x \log.(1-x) = -[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{2(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{3(m+4)} + \ldots\ldots]$, ubi Const. $= 0$. Est igitur:

$$\frac{1}{m+1}[x^{m+1} - 1] \log.(1-x) - \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x]$$

$= -[\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{2(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{3(m+4)} + \ldots\ldots]$, vel series infinita

$$\frac{x^{m+2}}{m+2} + \frac{x^{m+3}}{2(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{3(m+4)} + \frac{x^{m+5}}{4(m+5)} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{1}{m+1}[1 - x^{m+1}] \log.(1-x) + \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x].$$

§. 15. Posito igitur $m = 1$ habemus:
$\frac{x^3}{1 \cdot 3} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \ldots = \frac{1}{2}(1 - x^2)\log.(1 - x) + \frac{1}{2}(\frac{x^2}{2} + x)$,
quae expressio cum superiore §. 13. coincidit.

§. 16. Quodsi ponatur $x = \frac{1}{p}$, series modo reperta generalis induit hanc formam:

$$\frac{1}{(m+2)p^{m+2}} + \frac{1}{2(m+3)p^{m+3}} + \frac{1}{3(m+4)p^{m+4}} + \ldots\ldots$$

quae igitur expressioni huic $\frac{1}{m+1}[1 - \frac{1}{p^{m+1}}]\log.(1 - \frac{1}{p})$
$+ \frac{1}{m+1}[\frac{1}{(m+1)p^{m+1}} + \frac{1}{mp^m} + \frac{1}{(m-1)p^{m-1}} \ldots \frac{1}{2p^2} + \frac{1}{p}]$
aequalis est.

§. 17. Determinato igitur $\int x^m \partial x \log.(1-x)$ facile etiam obtinebitur $\int \partial x \int x^m \partial x \log.(1-x)$. Est enim

$$\int x^m \partial x \log.(1-x) = \frac{x^{m+1}}{m+1}\log.(1-x) - \frac{1}{m+1}\log.(1-x)$$
$$- \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{m} + \frac{x^{m-1}}{m-1} + \ldots\ldots + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{1}]. \text{ Ergo}$$
$$\partial x \int x^m \partial x \log.(1-x) = \frac{x^{m+1}\partial x}{m+1}\log.(1-x) - \frac{\partial x}{m+1}\log.(1-x)$$
$$- \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+1}\partial x}{m+1} + \frac{x^m \partial x}{m} + \frac{x^{m-1}\partial x}{m-1} + \ldots\ldots + \frac{x^2 \partial x}{2} + \frac{x \partial x}{1}], \text{ unde fit}$$
$$\int\partial x \int \partial x \int x^m \partial x \log.(1-x) = \frac{1}{m+1}\int\frac{x^{m+1}\partial x}{m+1}\log.(1-x) - \frac{1}{m+1}\int\partial x \log.(1-x)$$
$$- \frac{1}{m+1}[\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+1}}{m(m+1)} + \ldots \frac{x^3}{2 \cdot 3} + \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \text{Const.}$$

Deducitur autem $\int x^{m+1}\partial x \log.(1-x)$ ex valore $\int x^m \partial x \log.(1-x)$ supra jam determinato, ponendo $m+1$ pro m. Porro est $\int \partial x \log.(1-x) = 1 - x - (1-x)\log.(1-x)$; sed serie adhibenda fit $\partial x \int x^m \partial x \log.(1-x)$

$$= -[\frac{x^{m+2}\partial x}{m+2} + \frac{x^{m+3}\partial x}{2(m+3)} + \frac{x^{m+4}\partial x}{3(m+4)} + \ldots]. \text{ Ergo}$$

$$\int \partial x \int x^m \partial x \log.(1-x)$$
$$= -\left[\frac{x^{m+3}}{(m+2)(m+3)} + \frac{x^{m+4}}{2(m+3)(m+4)} + \frac{x^{m+5}}{3(m+4)(m+5)} + \ldots\right].$$

Quae igitur series per expressionem hanc finitam:

$$\frac{1}{m+1}\int x^{m+1}\partial x \log.(1-x) - \frac{1}{m+1}\int \partial x \log.(1-x) + C$$
$$- \frac{1}{m+1}\left[\frac{x^{m+2}}{(m+1)(m+2)} + \frac{x^{m+1}}{m(m+1)} + \ldots \frac{x^3}{2.3} + \frac{x^2}{1.2}\right]$$

exhibetur. Sic erit verbi causa, posito $m = 1$,

$$\frac{x^4}{1.3.4} + \frac{x^5}{2.4.5} + \frac{x^6}{3.5.6} + \frac{x^7}{4.6.7} + \ldots\ldots = -\frac{(1-x^3)}{6}\log.(1-x)$$
$$+ \tfrac{1}{2}(1 - x - (1-x)\log.(1-x)) + \tfrac{1}{6}\left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{x^3}{2.3} + \frac{x^2}{1.2}\right) + C, \text{ ubi } C = -\tfrac{1}{2}.$$

§. 18. Considerando formas $\int \partial x \int \partial x \int x^m \partial x \log.(1-x)$, $\int \partial x \int \partial x \int \partial x \int x^m \partial x \log.(1-x)$, etc. ad novas serierum summabilium species perduceremur.

§. 19. Forma autem $\partial y = x^m \partial x \log.(1+x)$ pari modo tractatur. Et possent etiam considerari ejusmodi expressiones: $\int x^n \partial x \int x^m \partial x \log.(1 \pm x)$, $\int x^p \partial x \int x^n \partial x \int x^m \partial x \log.(1 \pm x)$ etc. ad nova summarum genera elicienda.

§. 20. Dissertationi nostrae finem imposituri subjungimus quasdam series, quarum summatio ad peripheriam circuli revocatur.

Sit $\Phi = \text{Arc. sin. } x$, eritque $\partial \Phi = \frac{\partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, et contemplemur $\partial y = x^m \partial \Phi$, supposito m integro ac positiv

numero, unde $x^m \partial \Phi = \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, $y = \int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$. Jam vero est $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{1}{m} x^{m-1} \sqrt{(1-x^2)} + C$. Pendet ergo $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$, pro m pari, ab arcu Φ, pro m impari vero integrale est algebraïcum. Quare integrale hoc pro quovis m integro positivo tanquam cognitum usurpari potest. Integrale autem hoc evanescere ponitur, sumto $x = 0$, et facta integratione ponendum est $x = 1$. Jam ob $\partial y = x^m \partial \Phi$, est $y = x^m \Phi - \int \Phi m x^{m-1} \partial x$; et quia $\Phi = x + \frac{x^3}{2.3} + \frac{3x^5}{2.4.5} + \frac{3.5x^7}{2.4.6.7} + \ldots$ ideoque $m \Phi x^{m-1} \partial x = m x^m \partial x + \frac{m x^{m+2} \partial x}{2.3} + \frac{3 m x^{m+4} \partial x}{2.4.5}$

$+ \frac{3.5.m x^{m+6} \partial x}{2.4.6.7} + \ldots$ fiet $m \int \Phi x^{m-1} \partial x$

$= m[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{x^{m+5}}{m+5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{x^{m+7}}{m+7} + \ldots]$,

hinc $y = x^m \Phi - m[\frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{x^{m+3}}{m+3} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{x^{m+5}}{m+5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{x^{m+7}}{m+7} + \ldots]$.

Quia $y = 0$ pro $x = 0$, erit $C = 1$. Item pro $x = 1$ est $\Phi = \text{Arc. } 90° = \frac{\pi}{2}$. Est igitur $\int x^m \partial \Phi \left[{ab\ x = 0 \atop ad\ x = 1}\right]$

$= \frac{\pi}{2} - m[\frac{1}{m+1} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{m+3} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{1}{m+5} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{1}{m+6} + \ldots]$.

Quae igitur series valorem $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}}$ exprimit ab $x = 0$ ad $x = 1$ extensum.

§. 21. Ut pauca exempla subjungamus, sit 1°) $m = 3$, unde $\int \frac{x^m \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{2}{3} \int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} - \frac{x^2}{3} \sqrt{(1-x^2)} + C$, atque $\int \frac{x \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\sqrt{(1-x^2)}$, hinc $\int \frac{x^3 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = -\frac{(2+x^2)}{3} \sqrt{(1-x^2)} + C$, quod cum evanescere ponatur pro $x = 0$, erit $C = \frac{2}{3}$. Ergo $(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}) \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1.3}{2.4.5} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1.3.5}{2.4.6.7} \cdot \frac{1}{10} + \ldots$

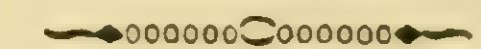
quae series igitur, lente convergens, per $\pi = 3,1415926\ldots$ datur.

2°) Pro $m = 5$ ex formulis nostris, reductione facta, obtinetur $\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} = \frac{8-(8+4x^2+3x^4)\sqrt{(1-x^2)}}{15}$, ergo

$$\int \frac{x^5 \partial x}{\sqrt{(1-x^2)}} \left[\begin{smallmatrix} ab\ x = 0 \\ ad\ x = 1 \end{smallmatrix}\right] = \frac{8}{15} \quad \text{et}$$

$$\left(\frac{\pi}{2} - \frac{8}{15}\right)\frac{1}{5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 5}\cdot\frac{1}{10} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}\cdot\frac{1}{12} + \ldots\ldots$$

et quae sunt his similia.



OBSERVATIONS FAITES À L'OBSERVATOIRE DE L'ACADÉMIE

PAR

F. T. SCHUBERT.

Présenté à la Conférence le 29 Nov. 1809.

Le tems de l'année passée a été moins favorable que jamais aux observations astronomiques, et plus d'une fois il s'est passé des semaines entieres, pendant lesquelles il m'a été impossible de faire seulement une observation, pour vérifier la marche des pendules. Les seules observations que le tems m'a permis de faire, sont celles que je vais présenter à l'Académie.

I. Occultation de δ♓ par la Lune, 1808 le $\frac{30 \text{ Juillet}}{11 \text{ Août}}$ matin, par un beau tems.

1) Immersion de δ♓ dans la partie éclairée de la Lune, à 23 h. 15 m. 53,5 s. tems *sidéral.*
2) Emersion dans la partie obscure, à 0 h. 31 m. 55 s. tems sidéral.
3) Emersion d'une petite étoile, à 23 h. 41 m. 59,5 s. t. s.

II. Occultation de *n du Sextant* (6. grandeur), 1809 le $\frac{13}{25}$ Août; le ciel étant très-nébuleux.

Immersion dans la partie obscure de la Lune, à 9 h. 46 m. 36 sec. tems *vrai*.

Pendant l'éclipse le brouillard était devenu si epais, qu'il n'y avait pas moyen d'observer l'émersion: je ne pus découvrir l'étoile qu'après qu'elle était éloignée de 2′ du bord de la Lune.

III. Eclipse de la Lune, 1809 le $\frac{17}{29}$ Avril. Toute la soirée le ciel était entierement couvert, et quoique une heure avant le commencement de l'Eclipse, il s'éclaircìt un peu, l'air était si trouble, que le bord et les taches de la Lune étaient très-mal terminés. Le tems de chaque observation est le tems *vrai*.

1) J'estimai l'entrée de l'ombre dans la partie Sud-Est de la Lune à 13 h. 6. m. 40 s.

2) Immersion de *Grimaldi*, c'est-à-dire, le point lumineux près du bord Sud-Ouest du *Palus Maracotis*.

Premier contact à 13 h. 11 m. 54 s.

Il disparut tout-à-fait à 13 h. 12 m. 54 s.

3) Immersion de *Tychon*, savoir le plateau brillant de la montagne. Premier contact à 13 h. 26 m. 10 s. Dernier à 13 h. 27 m. 35 s.

4) Immersion d'*Aristarque*. L'ombre toucha la pointe australe à 13 h. 33 m. 20 s. mais la tache entiere ne disparut tout-à-fait qu'après être plongée bien loin dans l'ombre, à 13 h. 40 m. 18 s.

5) Immersion de *Manilius*.

Premier contact à 13 h. 56 m. 0 s. Occultation à 13 h. 57 m. 36 s.

6) Immersion de *Goclénius* (N°. 15. de *Mayer*, tache très-marquée sur le bord oriental du *mare foecunditatis*).

Premier contact à 14 h. 1 m. 12 s. Occultation à 14 h. 2 m. 7 s.

7) Immersion de *Langrénus*, depuis 14 h. 5 m. 47 s. jusqu'à 14 h. 8 m. 46 s.

8) Immersion de *Posidonius*, depuis 14 h. 19 m. 23 s. jusqu'à 14 h. 22 m. 2 s.

9) Emersion d'*Aristarque*:

Premier contact à 14 h. 58 m. 36 s.

Dernier contact à 15 h. 0 m. 22 s.

10) Emersion de *Grimaldi*.

Premier contact à 15 h. 12 m. 0 s. Dernier à 15 h. 12 m. 30 s.

11) *Posidonius* fut entierement découvert *(emersit)* à 15 h. 17 m. 10 s. Cette observation est fort douteuse, à cause des nuages.

12) Emersion de *Manilius*, depuis 15 h. 25 m. 52 s. jusqu'à 15 h. 27 m. 20 s.

Voilà toutes les émersions que j'ai pu observer, parce que la Lune, très-peu élevée, se cacha derriere les toits et les cheminées des maisons voisines. Il y avait même beaucoup de difficulté d'observer les dernieres émersions, à cause des rayons du Soleil. En général, la pénombre était d'une couleur brune très-foncée, la véritable ombre ressemblait à une fumée très-épaisse. Deux minutes après l'immersion, la partie éclipsée de la Lune disparaissait tout-à-fait, mais les deux bouts du bord éclipsé luisaient à travers de l'ombre pendant trois minutes. Ceci augmentait pendant l'Eclipse, de sorte que vers le tems de la plus grande phase, j'entrevis presque tout le bord éclipsé, tandis que le reste de la partie éclipsée était tout-à-fait invisible.

IV. Occultation de λ Π par la Lune, 1809 le $\frac{24 \text{ Août}}{5 \text{ Septembre}}$ matin. Le ciel entier, jusqu'à la hauteur de 25 degrés, était couvert de vapeurs noires, à travers desquelles la lune luisait, semblable à un charbon rouge, de sorte qu'elle était très-mal terminée, et qu'on ne pouvait reconnaître les taches qu'avec beaucoup de peine. Cependant je crois pouvoir être sûr à une seconde près.

Immersion, dans la partie éclairée de la Lune, à 14 h. 14 m. 52,7 s. tems *vrai.*

Emersion, dans la partie obscure, à 15 h. 11 m. 22,9 s. tems vrai.

V. Occultation de 1. δ♉, 1809 le $\frac{16}{28}$ Septembre, au soir. Une demi-heure avant l'immersion le ciel s'éclaircit passablement.

Immersion dans le bord éclairé de la Lune, à 10 h. 40 m. 17,5 s. tems *vrai.*

Emersion sous le bord obscur, à 11 h. 29 m. 21,6 s. tems vrai.

VI. Occultation de 2. δ♉, le même jour.

Immersion dans le bord éclairé de la Lune, à 11 h. 6 m. 35,8 s. tems *vrai.*

Emersion sous le bord obscur, à 12 h. 11 m. 23 s. tems vrai.

Cette observation est moins sûre que la précédente de 1. δ, parceque le ciel commença à s'obscurcir. En général, je ne saurais répondre de la précision du tems de ces deux observations, parceque le ciel, toujours couvert pendant un mois entier, ne me permettait pas de m'assurer de la marche des pendules par des observations, excepté le 15 et le 23 Septembre, vieux Style.

II.
SECTION
DES
SCIENCES PHYSIQUES.

DISSERTATIONIS
DE ANTHERARUM PULVERE CONTINUATIO.

AUCTORE

I. T. KOELREUTER.

Conventui exhib. die 11 Januarii 1804.

Sectio quarta.

De figura antherarum pulveris.

§. 26.

Si diversitatem figurae antherarum pulveris secundum eas, a *Malpighi*, *Grew*, *Geoffroy* et *Verdries* commemoratas species dijudicares, pene crederes, eam tam grandem esse non posse.

§. 27. *Malpighi* eas a se prolatas species pulvisculorum generatim vocat globulos, licet quaedam illarum revera non habeant orbicularem formam; attamen antherarum pulverem Lilii crocei, montani, albi, in quo oblongam detexit, tanquam diversitatis exemplum statuit: quod vero unicum quoque est, cujus in opere suo de *Anatomia plantarum* mentionem fecit.

§. 28. *Grew* proponit quasdam rotundas, item orbicularem et compressam, porro cylindricas, oblongas et cubicas species, quibus omnibus superficiem laevem adscribit. Post has persequitur antherarum pulverem Malvarum et Alcearum, quem rotundum quidem, sed parvis sentibus undique obtectum invenit.

§. 29. *Geoffroy* describit viginti diversas species antherarum pulveris, quae etiam ex parte suo tempore jam notae fuerunt, et quarum mentionem *Grew* prius fecit. In genere sunt rotundae, partim cum, partim sine aristis, ovales, oblongae, cylindraceae, prismaticae, cum quatuor inaequalibus lateribus (quas *Grew* cubicas vocat); it. duo quasi sibi invicem accreti globuli; tanquam duo in crucis formam super se invicem positi cylindri, et nonnullae reniformes.

§. 30. Istae vero a *Verdries* in Act. Erudit. *) introductae quinquaginta species quoad plantas, de quibus illas demsit, partim novae, partim vero etiam notae et a mox memoratis auctoribus jam descriptae sunt: inter eas cum his comparatas, nullae quidem adeo singulares ac novae formae apparent; et praeter id, quod *Verdries* de

*) Vid. Acta Erudit. Ann. 1724. Lips. 4to. pag. 409 — 412. Tab. IV. fig. 1 — 50.

eis nihil aliud, quam sola nomina plantarum referat, de quibus oriuntur, earum quoque imagines, uti apud *Grew* et *Geoffroy*, fat mediocriter exaratae.

§. 31. Causa, cur usque ad hoc tempus nulla major diversitas detecta sit, omnino non est alia, quam quia pauco isto, quod diligentiae supra dictorum celebrium virorum debetur, contenti Physiologi, haud ulterius operam dederunt, ut novas et ignotas species sub magno numero plantarum inter se plane diversarum quaererent. Cum ego ipse vix trecentas circiter species microscopio exposuissem, jam inter eas non paucas, valde insolitas, rarasque figuras detexi. Quantum igitur, quaeso, sibi esset promittendum, si antherarum pulvis omnium huc usque notarum plantarum perquireretur? Attamen non est inficiandum, diversitatem inter antherarum pulverem certi plantarum numeri, quatenus oculo distinguitur, plane non tantam, quantam inter ipsas plantas, de quibus est demtus, existere. Dico autem — quatenus oculo distinguitur —: nam forsan aeque tantae et aeque tam multae differentiae in eo detegerentur, quantae inter ipsas plantas vel ullas earum partes sunt, si has magnitudine adaequaret, et differentiae aeque bene, quam in his, cognosci possint. Interea, cum hae nos semper latere possent, nemini persuasor existerem, ut

in herbarum systemate condendo antherarum pulverem pro fundamento ponat.

§. 32. Cum unus olim nostratum illustrissimorum Botanicorum ac Physiologorum *) tunc temporis de certa ac determinata figura unicuique plantae proprii antherarum pulveris dubitare videbatur, quia hunc saepius in una eademque planta diversae figurae se conspexisse asseveret: non possum omittere, quo minus meam de hac re sententiam dicam, sperans, fore, ut per id dubia ejus facile solvantur. Experientia me ipsum docuit, ejus observationes generatim esse veras: inveni enim unius ejusdemque floris uniusque antherae pulvisculos nonnunquam diversae esse figurae. Totum vero hoc discrimen in nulla alia re, quam in majori vel minori declinatione ejus a determinata sua

*) *Ludwig.* Instis. R. V. Lips. 1757. pag. 237. §. 506. „Si antherarum pulverem jam excussum microscopii ope disquirimus, non quidem „globulos illos pellucidos, sed particulas minimas dispersas diversam figuram sistere cognoscimus. Facile quidem langimur, hanc figurae „differentiam a variis botanicis observatam et descriptam *Geoffroy* et „*Verdries* etc. in negotio generationis, in plantarum flore perficiendo, „aliquem usum praestare, quinam vero sit, et an pulveris particulae „plantulas ipsas seminales sistant, definire non audemus. Exsiccato „globulorum pellucidorum, in pulverem mutatorum, non nunquam figuram mutare videtur, in pulvere ideo unius ejusdemque plantae diversam figuram particularum conspeximus, nec in congeneribus plantis, „nec in speciebus unius generis talem observamus convenientiam, quae „hanc doctrinam illustrat."

et sub iisdem circumstantiis plane sibi simili forma fundatum est. Harum diversitatum mutationumque causa modo inpressione, quam hic vel ille antherarum pulvisculus ullo quodam casu antea patiebatur, modo in majori vel minori copia in eo adhuc contentae propriae materiae spermaticae, hincque vel in majori ejus distentione, vel in excretionem dicti spermatis insequente contractione, corrugatione, aut plenaria ejus exsiccatione, interdum quoque, quod saepius accidit, in extraordinaria ejus nimio humore et pluvia concitata extensione, vel etiam hanc non raro insequente illius fissione, qua unâ cum jam praeparato oleo spermatino et ipse telae cellulosae nucleus violento modo expellitur, sita est. Hinc quoque, e. gr. evenit, ut antherarum pulvis multarum plantarum brevi ante antherarum apertionem, vel quoque non multum post, illis jam adapertis nunc incumbens, maximus, crassissimus, plurimumque tumidus sit, utque per longum jam tempus aperto aëri expositus, non amplius tam orbicularis et turgidulus, sed multo minor, angustior, acutior, angulosior, et generatim magis contractus compressusque esse videatur. Intelligenda est autem haec sub diversis circumstantiis commutata facies de majori numero pulvisculorum; interdum enim omnino nonnulli posterioris qualitatis inter illos prioris, ac vice versa, reperiuntur; id quod tum fortuitis causis, quae

cum supra commemoratis eundem produnt effectum, adscribendum est.

§. 33. Ceterum ejusmodi mutationes sub certa quadam limitatione sumendae sunt: fieri enim e. gr. non potest, ut triangularis forma cujusdam antherarum pulveris in quadrangularem sese commutet; nunquam quoque occurret, ut, e. gr. inter pulvisculos unius ejusdemque floris et ellipticos et rotundos, vel cylindricos inter cubicos promiscue, reperias, nisi forte commixtio cujusdam speciei cum alio antherarum pulvere vel ope venti, vel per insecta, quod omnium saepissime accidit, aut ullo alio casu facta fuerit. Quam rem experientia atque observationibus edoctus illis ad cavendum praecipio, qui, si forte antherarum pulvisculi maxime diversae figurae cum se invicem commisti ab ipsis dedrehendantur, hoc errore inducti falsa inde concludant.

§. 34. Quod si ergo quaestio sit: num antherarum pulvisculis unius ejusdemque plantae, quamdiu sub iisdem circumstantiis permanent, eadem quoque competat forma? veritate explorata eam affirmare possum. Sin vero ejusdem speciei antherarum pulvisculi sub certis circumstantiis e. gr. ovalem, sub aliis oblongam, et rursus sub aliis ellipticam formam ostenderent, merito foret interrogandum, quaenam inter has tres sit vera et naturalis?

Quamvis equidem reprehendere nollem, si hoc de omnibus tribus contenderetur; absque haesitatione tamen, praesertim respectu illius conditionis, sub qua sunt perfectissimi, oblongam sive mediam figuram prae duabus aliis naturalem esse putarem, quia sub hac summum suae perfectionis ac maturitatis gradum, ceu reliquae floris partes, assecuti, maximique idonei sunt, ad justum suum effectum praestandum: cum e contrario sub prima adhuc immaturi, et sub tertia jam plerumque exinaniti sunt, muneraque, ad quae a natura destinati erant, praestiterunt; de qua re in capite de vero semine masculino plantarum plura dicentur. Sic quoque secundum easdem circumstantias verus et naturalis color, magnitudo et consistentia antherarum pulveris facile aestimari poterunt. Certa igitur et expedita quoque res est, antherarum pulvisculos cujusvis plantae sub certis circumstantiis certam semper et a natura determinatam figuram, colorem, magnitudinem et consistentiam habere; uti hoc etiam ex sequentibus clarius apparebit.

§. 35. Trado hic benevolo Lectori Tabulam specierum istarum facile omnium, quarum colorem in praecedenti dissertatione definivi, secundum figuram ac conformationem distributam, ut maximae pulveris antherarum diversitatis quasi uno prospectu cerni, eoque facilius quaedam consectaria, quorum plus infra mentionem facturus sum, ex

iis dici possint. Hac antherarum pulveris species in certas quasi classes ordinesque divisae sunt, uti cujusvis naturalis figura exigit; quam in plurimis recte determinasse mihi videor. Sin autem nonnullae loco minus apto adscriptae forent, uti spero, propter difficultates, quae aliquoties in rite definienda naturali figura nobis obstant, et praecipue sufficientium idonearumque distinctionis terminorum defectui adscribendae sunt, hujus vitii causa excusatus ero. En ipsam Tabulam:

Superficie laevi.

Subrotundus:

a) *aequalis superficiei.*

Alpinia *spicata.*

Utricularia *vulgaris.*

Collinsonia *canadensis.*

Piper *verticillatum.*

Crocus *sativus.*

Phleum *pratense.*

Dactylis *glomerata.*

Scabiosa *Succisa.*

Asperula *cynanchica.*

Plantago *major.*

— — *media.*

— — *lanceolata.*

— — *alpina.*

Rivina *humilis.*

Alchemilla *vulgaris.*

Potamogeton *natans.*

Sagina *procumbens.* *

Phlox *glaberrima.*

Not. Asterisco notati in facies vel areolas plerumque hexagonas circumcirca dispartiti sunt, hincque rotundato-angulati apparent. (wie geschliffene Granaten.)

Phlox paniculata.
Convolvulus *sepium.*
— — — *tricolor.*
Polemonium *coeruleum.*
Campanula *patula.*
— — — *Rapunculus.*
— — — *Speculum* ♀
Phytevma *orbicular.*
— — *spicata.*
Trachelium *coeruleum.*
Mirabilis *Jalapa.*
— — *dichotoma.*
— — *longiflora.*
Datura *Stramonium.*
— — *fastuosa.*
Hyoscyamus *Scopolia.*
— — — *physalodes.*
Ribes *nigrum.*
Celosia *cristata.*
Beta *vulgaris.*
Chenopodium *Bon. Henric.*
— — — *rubrum.*
— — — *murale.*
— — — *album.*
Chenopodium *Botrys.*
— — — *ambrosioid.*
Gomphrena *globosa.*
Ulmus *campestris.*
Alsine *media* *.
Berberis *vulgaris.*
Rumex *obtusifol.*
— — *scutatus.*
— — *Acetosa.*
Triglochin *palustre.*
Petiveria *alliacea.*
Alisma *Plantago aquatica.*
Daphne *Mezereum.*
Stellera *Passerina.*
Polygonum *amphibium.*
— — — *Persicaria.*
— — — *orientale.*
Laurus *nobilis.*
Cassia *marilandica.*
Tribulus *terrestris.*
Monotropa *Hypopith.*
Scleranthus *annuus.* *
— — *perennis.* *
Gypsophila *muralis.*

Saponaria *officinalis.*
— — *Vaccaria.* *
Dianthus *barbatus.* *
— — *carthusianor.*
— — *Armeria.* *
— — *prolifer.* *
— — *Caryophyll.* *
— — *superbus.* *
— — *plumarius.* *
— — *pungens*, Linn. Mant.. *
— — *ferrugineus.* Linn. Mant. *
Cucubalus *Behen.*
Silene *nutans.* *
— — *quinquevuln.* *
— — *noctiflora.* *
— — *Armeria.* *
Stellaria *Holostea.* *
— — *graminea.* *
— — *aquatica*, Poll. palat. *
Arenaria *serpillifol.* *
— — *saxatilis.*

Malpighia *urens.*
Agrostemma *Githago.* *
— — — *Coronaria.*
Lychnis *chalcedonica.*
— — *Flos cuculi.* *
— — *dioica.*
Cerastium *viscosum.* *
— — *arvense.*
— — *aquaticum.* *
Spergula *arvensis.*
Forskohlea *tenaciss.*
Portulaca *oleracea.*
— — *Anacamps.*
Cactus *Opuntia.*
— — *Tuna.*
Mesembryanth. *hispidum.*
— — — *tenuifolium.*
— — — *acinaciforme.*
Thalictrum *sibir.* panicula multiplici, pendula, foliolis circumscriptione subrot. trifid. stigmate seminum membranaceo.
— — — *sibir.* caule ra-

mosiss. flexuoso, panicula multipl. subnud. foliol. oblong. trifid. laciniis acutior. rectis.

Ranunculus *polyanthem.*

— — — *acris.*

Lantana *Camara.*

Orobanche *major.*

Ruellia *biflora.*

Hermannia *hyssopifolia.*

Geranium *papilionac.*

— — *zonale.*

— — *odoratiss.*

— — *malacoid.*

— — *robertian.*

— — *molle.*

— — *dissectum.*

— — *sanguineum.*

— — *columbinum.*

Fumaria *fungosa.*

Phaseolus *vulgaris α.*

Dolichos *Lablab.*

Psoralea *bituminosa.*

Abroma *augusta.*

Jasione *montana.*

Aristolochia *clematit.*

Arum *Dracunculus.*

— — *maculatum.*

Coix *Lacryma Jobi.*

Betula *alba.*

Buxus *sempervirens.*

Urtica *urens.*

— — *dioica.*

Xanthium *strumarium.*

Amaranthus *caudatus.*

— — — *sanguineus.*

— — — *hypochondriac.*

Myriophyllum *spicatum.*

— — — *verticillat.*

Sagittaria *sagittifol.*

Poterium *Sanguisorba.*

Carpinus *Betul.*

Pinus *Larix.*

Acalypha *virgin.*

Cucurbita *Lagenaria.*

Myrica *quercifolia.*

Spinacia *oleracea.*

Cannabis *sativa.*

Humulus *Lupulus.*
Populus *tremula.*
Hydrochar. *Mors. ran.*
Cliffortia *ilicifolia.*
Juniperus *communis.*
— — *phoenicea.*
Taxus *baccata.*
Parietaria *officinal.*
— — *judaica.*
Atriplex *hortensis.*
— — *patula.*
Mimosa *sensitiva.*
— — *nilotica.*

β) *Inaequalis et quasi crenatus.*

Plumbago *scandens.*
Ocimum *Basilicum.*
Martynia *annua.*
Bignonia *Catalpa.*
Passiflora *foetida.*
— — *incarnata.*
— — *coerulea.*

γ) *Umbilicis* 2 — 3 *prominentibus.*

Colutea *arborescens.*

δ) *Annulo in medio cinctus.*

Trapa *natans.*

ε) *Angulosus.*

Poa *annua.*
Festuca *fluitans.* *
Herniaria *glabra.*
— — *hirsuta.*
Juncus *articulatus.*
— — *pilosus.*
— — *campestris.*
Rumex *crispus.*
— — *Acetosella.*
Thalictrum *minus.*
Glycina *Apios.*
Betula *Alnus.*
Juglans *regia.*

Ovato rotundatus.

Verbena *officinalis.*
Hordeum *hexastich.*
Triticum *repens.*
Festuca *elatior.*
Atropa *Belladonna.*
Calyncanthus *floridus.*

Aconitum *Napellus.*
Hermannia *althaeifolia.*
— — — *lauendulifolia.*
Fumaria *bulbosa.*
Zea *Mays.*
Tripsacum *dactyloides.*
Morus *alba.*
Corylus *Avellana.*
Cupressus *sempervirens.*
Holcus *lanatus.*

Ovalis,
et partim propter sulcos
meloniformis. * *

Callitriche *verna.*
Syringa *persica.*
Lycopus *europaeus.*
Monarda *fistulosa.*
— — *didyma.*
— — *punctata.* * *
Salvia *Horminum.* * *
— — *pratensis.* * *
— — *verticillata.* * *
— — *glutinosa.* * *
— — *canariens.* * *
Salvia *Sclarea.* * *
— — *formosa.* * *
Anthoxanth. *odoratum.*
Valeriana *rubra.*
— — *calcitrapa.*
— — *Cornucopiae.*
— — *Locusta.*
Ixia *chinensis.*
Iris *Xiphium.*
Globularia *nudicaulis.*
Asperula *odorata.*
— — *arvensis.*
Galium *sylvaticum.*
— — *Mollugo.*
— — *Aparine.*
Tournefortia *sibirica.*
Primula *veris.* α et β.
— — *Auricula.*
Convolvulus *arvensis.*
— — — *canariensis.*
— — — *althaeoides.*
Nerium *Oleander.*
Gentiana *Pnevmonanthe.*
— — *verna.*

Statice *Armeria.*
— — *Limonium.*
— — *sinuata.*
Linum *maritimum.*
Crassula *coccinea.*
Myosurus *minimus.*
Acorus *Calamus.*
Prinos *verticillatus.*
Tiarella *cordifolia.*
Arenaria *rubra.*
Euphorbia *exigua.* α.
— — — *helioscopia.* * *
Mesembryanth. *filamentos.*
— — — *bicolor.*
— — — *expansum.*
— — — *tortuosum.*
Spiraea *Filipendula.*
Argemone *mexicana.*
Aquilegia *vulgaris.*
— — *canadensis.*
Trollius *europaeus.*
Satureja *hortensis.* * *
Mentha *rotundifol.* * *
— — *aquatica.* * *
Mentha *gentilis.* * *
— — *exigua.* * *
— — *Pulegium.* * *
Nepeta *Cataria.* * *
Hyssopus *officinalis.*
Marrubium *vulgare.*
Phlomis *tuberosa.*
Clinopodium *vulgare.* * *
Origanum *vulgare.* * *
— — *Majorana.* * *
Thymus *Serpillum.* * *
— — *vulgaris.* * *
— — *Acinos.* * *
Melissa *officinal.* * *
— — *Calamintha.* * *
Dracocephalum *canariense.* * *
— — — *Moldavica.* * *
Scutellaria *minor.*
Prunella *vulgaris.*
Euphrasia *lutea.*
Melampyrum *arvense.*
— — — *nemorosum.*
— — — *pratense.*
— — — *sylvaticum.*

Linnaea *borealis.*
Acanthus *mollis.* * *
Cheiranthus *annuus.*
Cleome *violacea.*
Geranium *fulgidum.*
— — *inquinans.*
— — *vitifolium.*
— — *zonale.*
— — *capitatum.*
— — *lobatum α.*
— — *triste.*
— — *cicutarium.*
Coronilla *glauca.*
Indigofera *psoraloid.*
Artemisia *Absinthium.*
— — *vulgaris.*
Centaurea *Scabiosa.*
Serapis *longifolia.*
Grewia *occidentalis.*
Calla *aethiopica.*
Valantia *cruciata.*
Chamaerops *humilis.*
O v a t u s,
regularis.

Nyctanthes *Sambac.*
Jasminum *officinale.*
— — *azoricum.*
— — *odoratissimum.*
— — *fruticans.*
Galium *uliginosum.*
Rubia *tinctorum.*
— — *peregrina.*
Plumbago *zeylanica.*
Rhamnus *Alaternus.*
Ribes *rubrum.*
— — *Grossularia.*
Achyranthes *aspera.*
Linum *austriacum.*
Polygonum *divaricatum.*
— — — *dumetorum.*
Phytolacca *decandra.*
Euphorbia *officinarum.*
— — — *Caput Medusae.*
Tetragonia *fruticosa.*
Aizoon *canariense.*
Spiraea *Ulmaria.*
Actaea *racemosa.*
Cistus *populifolius.*
— — *laurifolius.*

Clematis *Viticella.*
— — *Flammula.*
Adonis *autumnalis.*
Ranunculus *Ficaria.*
Helleborus *niger.*
Scutellaria *galericulata.*
Euphrasia *Odontites.*
Pedicularis *sylvatica.*
Chelone *barbata.*
Browallia *demissa.*
Cochlearia *Armoracia.*
Artemisia *Dracunculus.*
Impatiens *Noli tangere.*
Platanus *occidentalis.*
Ricinus *communis.*

Ovatus,
irregularis,
cochleae porcellanae forma.

Moraea *irioides.* L. Mant.
Cornus *sanguinea.*
Itea *virginica.*
Gentiana *Amarella.*
Haemanthus *puniceus.*
Tulipa *Gesner.*
Asphodelus *fistulos.*
Lamium *album.*
— — *purpur.*
— — *amplexicaule.*
Rhinanthus *Crista galli.*
Pedicularis *palustris.*
Sparganium *erectum.*
Momordica *Charantia.*
Cucurbita *Citrullus.*

Oblongus,
a) extremitatibus obtusior.

Hippuris *vulgaris.*
Jasminum *grandiflor.*
Veronica *Anagall. aquatic.*
Galium *verum.*
Sanguisorba *officinar.*
Ptelea *trifoliata.*
Heliotropium *peruvianum.*
Lysimachia *vulgaris.*
— — — *Ephemer.*
— — — *quadrifol.*
— — — *ciliata.*
— — — *Nummularia.*
— — — *arabica.*
Anagallis *Monelli.*

Capsicum *annuum.*
Bupleurum *ranunculoides.*
Viburnum *Tinus.*
— — *nudum.*
Cassine *Maurocenia.*
Polianthes *tuberosa.*
Peplis *Portula.*
Polygonum *aviculare.*
— — — *Convolvulus.*
Ruta *graveolens.*
Saxifraga *tridactylit.*
Cotyledon *Telephium.*
— — — *serrata.*
Lythrum *Salicaria.*
Reseda *Luteola.*
Euphorbia *platyphylla.*
Sempervivum *arboreum.*
— — — *arachnoid.*
Punica *Granatum.*
Amygdalus *persica.*
— — — *nana.*
Prunus *virginiana.*
Mesembryanth. *crystallin.*
Rubus *caesius.*
Rubus *fruticos.*
Tormentilla *erecta.*
Geum *urbanum.*
Comarum *palustre.*
Thea *bohea.*
Cistus *apenninus.*
Corchorus *siliquosus.*
— — — *trilocular.*
Delphinium *Consolida.*
— — — *Ajacis.*
— — — *elatum.*
Nigella *damascena.*
— — *sativa.*
— — *orientalis.*
Liriodendron *Tulipifera.*
Anemone *vernalis.*
Helleborus *viridis.*
— — — *foetidus.*
Stachys *sylvatica.*
Euphrasia *officinalis.*
Antirrhinum *Linaria.*
Lantana *africana.*
Vitex *Agnus castus.*
Spartium *scoparium.*

Robinia *Caragana.*
Colutea *herbacea.*
Aeschynomene *americ.*
Astragalus *canadensis.*
Citrus *medica.*
— — *Aurantium.*
Lobelia *Cardinalis.*
— — *siphilitica.*
— — *inflata..*
— — *cliffortia.*
Quercus *Robur.*
Fagus *Castanea.*
— — *sylvatica.*
Ceratonia *Siliqua.*
β) *Extremitatibus acutioribus.*
Physalis *Alkekengi.*
Solanum *Dulcamara.*
— — *nigrum.*
— — *Melongena.*
Parnassia *palustris.*
Chelidonium *majus.*
— — — *corniculat.*
Stachys *palustris.*
Antirrhinum *Elatine.*
Antirrhinum *monspessulan.*
Limosella *aquatica.*
Artemisia *campestris.*
Mimosa *virgata.*
Cylindraceus,
a) *regularis.*
Justicia *Adhatoda.*
Verbena *Aubletia.*
Heliotropium *europaeum.*
Borago *orientatis.*
Lycopsis *variegata.*
— — *arvensis.*
Vinca *minor.*
— — *major.*
— — *rosea.*
Sanicula *europaea.*
Heracleum *Sphondylium.*
Sium *nodiflorum.*
— — *Sisarum.*
Phellandrium *aquaticum.*
Athamanta *Oreoselinum.*
Chaerophyllum *sylvestre.*
Pastinaca *sativa.*
Anethum *graveolens.*

Apium *graveolens.*
Aegopodium *Podagraria.*
Turnera *ulmifolia.*
Cercis *Siliquastrum.*
Agrimonia *Eupator.*
Melianthus *minor.*
Polygala *vulgaris.*
Amorpha *fruticosa.*
Crotalaria *capensis.*
Ononis *spinosa.*
Anthyllis *vulnerar.*
Lupinus *albus.*
— — *angustifol.*
Pisum *sativum.*
Lathyrus *sativus.*
— — *odoratus.*
— — *annuus.*
— — *tuberosus.*
— — *pratensis.*
— — *sylvestris.*
— — *latifolius.*
Vicia *Cracca.*
— — *sativa.*
— — *Sepium.*

Vicia *Faba.*
Ervum *hirsutum.*
Cicer *arietinum.*
Cytisus *Laburnum.*
sessilifol.
Robinia *Pseudo-Acacia.*
Colutea *frutescens.*
Coronilla *Emerus.*
— — *valentina.*
— — *varia.*
— — *glauca.*
Scorpiurus *vermiculata.*
Hedysarum *coronarium.*
Gelega *officinalis.*
Astragalus *glyciphyll.*
Trifolium *Melilot. off.* fl. fl.
— — *rubens.*
— — *arvense.*
— — *agrarium.*
Lotus *hirsuta.*
— — *corniculat.*
Medicago *sativa.*
— — *falcata.*
— — *lupulina.*
Centaurea *Cyanus.*

Centaurea *montana.*
Viola *tricolor.*
Passiflora *suberosa.*
β) *Contractiores in medio, paniculis saccharatis* (Zuckerbrödtchen) *non absimiles.*
Justicia *hyssopifolia.*
Borago *officinarum.*
Dodecatheon *Meadia.*
Tordylium *Anthriscus.*
Caucalis *grandiflora.*
— — *leptophylla.*
Daucus *Carota.*
Conium *maculatum.*
Cicuta *virosa.*
Aethusa *Cynapium.*
Scandix *odorata.*
— — *Cerefolium.*
Chaerophyllum *temulum.*
Anethum *Foeniculum.*
Pimpinella *Saxifraga.*
— — — *Anisum.*
γ) *Intumidus in medio.*
Atropa *physalodes.*
Tropaeolum *minus.*
— — — *majus.*
δ) *Incurvatus.*
Colchicum *autumnale.*
Ellipticus, latior,
α) *Fere granorum hordei forma.*
Wulfenia *carinthiaca.*
Ligustrum *vulgare.*
Syringa *vulgaris.*
Veronica *virginica.*
— — *spicata.*
— — *Chamaedrys.*
— — *hederifolia.*
Scherardia *arvensis.*
Epimedium *alpinum.*
Cornus *mas.*
Nolana *prostrata.*
Hottonia *palustris.*
Anagallis *arvensis.*
Verbascum *Thapsus.*
— — — *Lychnitis.*
— — — *phlomoides.*
— — — *Blattaria.*

Hyoscyamus *niger.*
Nicotiana *Tabacum.*
— — *rustica.*
— — *paniculata.*
— — *glutinosa.*
Solanum *Lycopersicum.*
Lycium *afrum.*
— — *barbarum.*
Rhamnus *catharticus.*
— — *Frangula.*
Celastrus *buxifolius.*
Evonymus *europaeus.*
Hedera *quinquefolia.*
Vitis *vinifera.*
Lagoecia *cuminoides.*
Heuchera *americana.*
Gentiana *Centaurium.*
Sium *latifolium.*
Rhus *Coriaria.*
—— *copallinum.*
—— *Toxicodendron.*
Viburnum *Lantana.*
— — *Opulus.*
Sambucus *Ebulus.*

Sambucus *nigra.*
— — *racemosa.*
Staphylea *trifolia.*
Tamarix *germanica.*
Linum *catharticum.*
Crassula *tetragona.*
Galanthus *nivalis.*
Narcissus *Tazetta.*
Pancratium *illyricum.*
Crinum *americanum.*
Amaryllis *Belladonna.*
— — *zeylanica.*
Allium *nutans.*
Lilium *candidum.*
— — *bulbiferum.*
— — *chalcedonicum.*
— — *Martagon.*
Aloe *perfoliata.*
— — — δ.
—— *disticha.*
Agave *americana.*
Aesculus *Hippocastanum.*
— — *Pavia.*
Rheum *undulatum.*

Butomus *umbellatus.*
Cassia *Senna.*
— — *planisiliqua.*
Pyrola *secunda.*
Royena *lucida.*
Hydrangea *arborescens.*
Saxifraga *Cotyledon.*
— — *crassifolia.*
— — *Geum.*
— — *granulata.*
Cotyledon *Umbilicus* ♀.
Sedum *Anacampseros.*
— — *reflexum.*
— — *rupestre.*
— — *acre.*
Oxalis *Acetosella.*
Peganum *Harmala.*
Reseda *Phyteuma.*
Euphorbia *Peplus.*
— — — *Esula.*
Philadelphus *coronar.*
Prunus *Padus.*
— — *Cerasus.*
— — *insititia.*

Prunus *spinosa.*
Crataegus *Aria.*
— — *Oxyacantha.*
Sorbus *aucuparia.*
Mespilus *canadensis.*
Pyrus *communis.*
— — *Malus.*
Spiraea *hypericifolia.*
— — *Opulifolia.*
Rosa *canina.*
— — *sylvestr.* Poll. palat. etc.
— — *punicea.* Mill. H. angl. etc.
Rubus *odoratus.*
Geum *rivale.*
Papaver *dubium.*
— — *Rhoeas.*
— — *somniferum.*
— — *orientale.*
Cistus *incanus.*
— — *albidus.*
Nigella *arvensis.*
Anemone *Hepatica.*
— — *sylvestris.*

Adonis *aestivalis.*
— — *vernalis.*
Caltha *palustris.*
Ajuga *pyramidalis.*
— — *reptans.*
Lamium *album.*
Galeopsis *Ladanum.*
— — *cannabina.* Hall.
Stachys *germanica.*
Ballota *nigra.*
— — *alba.*
Leonurus *Cardiaca.*
Phlomis *Leonurus.*
Moluccella *spinosa.*
Melitis *Melissophyllum.*
Prasium *majus.*
Chelone *glabra.*
Gesneria s. *Cyrilla pulchella.*
Antirrhinum *Cymbalaria.*
— — — *minus.*
— — — *majus.*
Hemimeris *coccinea.*
Scrophularia *nodosa.*
— — — *aquatica.*
Celsia *orientalis.*
Digitalis *purpurea.*
— — *lutea.*
— — *ambigua.* Jacq.
Usteria *scandens.*
Bignonia *radicans.*
Capraria *biflora.*
Hebenstreitia *dentata.*
Orobanche *laevis.*
— — — *ramosa.*
Mimulus *ringens.*
Draba *verna.*
Lepidium *sativum.*
— — *latifolium.*
Thlaspi *arvense.*
— — *Bursa Pastoris.*
Cochlearia *Coronopus.*
Iberis *umbellata.*
— — *nudicaulis.*
Lunaria *rediviva.*
Dentaria *pentaphylla.*
Cardamine *pratensis.*
— — — *amara.*
Sisymbrium *amphibium.*

Sisymbrium *Sophia.*
— — — *strictissimum.*
Erysimum *officinale.*
— — *Barbarea.*
— — *Alliaria.*
Cheiranthus *erysimoides.*
Arabis *Thaliana.*
Turritis *hirsuta.*
— — *glabra.*
Hesperis *tristis.*
Brassica *Napus.*
— — *Erucastrum.*
Sinapis *arvensis.*
Raphanus *sativus.*
— — *Raphanistrum.*
Isatis *tinctoria.*
Cleome *viscosa.*
— — *violacea.*
Hypericum *Ascyron.*
Viola *odorata.*
—— *canina.*
Sisyrinchium *Bermudiana.*
Momordica *Elaterium.*
Bryonia *alba.*

Salix *amygdalina.*
Mercurialis *annua.*
Schinus *Molle.*
Ruscus *aculeatus.*
— — *Hypoglossum.*
Clutia *pulchella.*
Veratrum nigrum.
Acer *Pseudo - Platan.*
—— *rubrum.*
—— *campestre.*
Begonia *obliqua.*
Fraxinus *Ornus.*
β) *Gracilior.*
Commelina *africana.*
Menyanthes *trifoliata.*
Astrantia *major.*
Oenanthe *fistulosa.*
Tradescantia *virginiana.*
Narcissus *poëticus.*
Allium *Victorialis.*
— — *multibulbosa.* Jacq.
Aloe *viscosa.*
Disandra *prostrata.*
Paris *quadrifolia.*

Elatine *Hydropiper.*
Zygophyllum *Fabago.*
Fagonia *cretica.*
Reseda *lutea.*
— — *odorata.*
Prunus *sibirica.*
Rubus *idaeus.*
Fragaria *vesca.*
Potentilla *fruticosa.*
— — — *Anserina.*
— — — *recta.*
— — — *argentea.*
— — — *verna.*
— — — *reptans.*
Teucrium *fruticans.*
— — — *hircanicum.*
— — — *Scorodonia.*
— — — *Chamaedrys.*
Betonica *officinalis.*
Galeopsis *Tetrahit.*
Antirrhinum *Orontium.*
Cochlearia *officinalis.*
Genista *sagittalis.*
Hypericum *balearicum.*

Hypericum *quadrangulum.*
— — — *perforatum.*
— — — *humifusum.*
— — — *montanum.*
Ascyrum *Hypericoid.*
Salix *fragilis.*

γ) *Gracilior, incurvatus, ac in medio intumidus.*

Amaryllis *formosissima.*

δ) *Papillis in medio tribus prominulis.*

Cephalanthus *occidentalis.*

Amygdaliformis.

Gratiola *officinalis.*
Echium *vulgare.*
— — *creticum.*
Cyclamen *europaeum.*

C o n i c u s,
vel Cuneiformis.

Scirpus *palustris.*
— — *acicularis.*
— — *lacustris.*
— — *setaceus.*
— — *mucronatus.*

Lolium *perenne.*

Carex *muricata.*

— — *canescens.*

Lanceolatus.

Ixia *crocata.*

Gladiolus *communis.*

Antholyza *Cunonia.*

Iris *Pseudacorus.*

— *graminea.*

Potamogeton *lucens.*

— — — *crispum.*

— — — *pusillum.*

Crinum *africanum.*

Amaryllis *Atamasco.*

— — *reginae.*

Allium *Schoenoprasum.*

Fritillaria *Imperialis.*

— — *Meleagris.*

Ornithogalum *pyramidale.*

— — — *nutans.*

Anthericum *ramosum.*

— — — *frutescens.*

— — — *alooides.*

— — — *calyculatum.*

Asparagus *officinalis.*

— — — *capensis.*

Convallaria *majalis.*

— — — *multiflora.*

— — — *bifolia.*

Hyacinthus *serotinus.*

— — — *orientalis.*

— — — *Muscari.*

Yucca *aloifolia.*

Aloe *variegata.*

—— *Uvaria.*

Alstroemeria *pelegrina.*

Hemerocallis *fulva.*

Dictamnus *albus.*

Capparis *spinosa.*

Magnolia *grandiflora.*

Veratrum *album.*

Tympani congeminati forma.

Pinus *sylvestris.*

—— *Picea.*

—— *Abies.*

Globuli duo concreti.

Myosotis *scorpioides.*

Lythospermum *arvense.*

Anchusa *officinalis.*
Cynoglossum *officinale.*
— — — *Omphalodes.*
Symphytum *officinale.*
Cerinthe *major.*
Lycopsis *vesicaria.*

Globuli tres in una serie concreti.

Pulmonaria *sibirica.*

Globuli quatuor sibi invicem accreti.

Periploca *africana.*
Apocynum *androsaemifolium.*
cannabinum.
Annona *triloba.*
Ophrys *Nidus avis.*
Typha *latifolia.*

Globuli quatuor, quinque vel sex sibi invicem accreti.

Vaccinium *Myrtillus.*
— — — *Vitis idaea.*
Erica *vulgaris.*
Kalmia *angustifolia.*
Rhododendrum *ponticum.*
Rhododendrum *maximum.*
Andromeda *calyculata.*
Arbutus *Unedo.*
Pyrola *rotundifolia.*
— — *secunda.*
Fumaria *sempervirens.*
— — *capnoides.*
— — *officinalis.*
— — *capnoid.* fl. alb. Hall.

Amygdalae quatuor, extremitatibus suis cohaerentes.

Datisca *cannabina.*

Trigonus, quasi pileiformis,

a) angulis prominentibus obtusioribus.

Azalea *nudiflora.*
Lonicera *Caprifolium.*
— — *Peryclimenum.*
Oenothera *biennis.*
— — — *mollissima.*
— — — *longifl.* L. Mant.
Gaura *biennis.*
Epilobium *angustifol.*
— — — *latifolium.*

Epilobium *hirsutum* α et β.
— — — *montanum.*
— — — *tetragonum.*
— — — *palustre.*
Cardiospermum *Halicacabum.*
β) *angulis obtusioribus, haud prominulis.*
Scabiosa *palaestina.* L. Mant.
Fuchsia *coccinea.*
Metrosideros *gummifera.*
Tilia *europaea.*
—— *americana.*
Hedysarum *canadense.*
Carex *acuta.*
Carex *vesicaria.*
Cucumis *prophetarum.*
— — *Melo.*
— — *sativa.*
γ) *angulis acutioribus.*
Lopezia *hirsuta.*
— — *glabra.*
Circaea *lutetiana.*
Menyanthes *nymphoid.*

Cubicus seu quadrangularis.

Basella *lucida.*
— — *rubra.*

Superficie aculeata.

Subrotundus:

α) *Villis brevibus et acutis.*

Boerhaavia *repens.*
Iris *pumila.*
Dipsacus *fullonum.*
— — — *laciniatus.*
Knautia *orientalis.*
Campanula *pyramidalis.*
Campanula *rapunculoid.*
— — — *Trachelium.*
— — — *Medium.*
Cactus *hexagonus.*
— — *flagelliformis.*
Scorzonera *tingitana.* *
Picris *hieracioides.* *
Prenanthes *muralis.*

Leontodon *autumnale.*
— — — *hispidum.*
Hieracium *aurantiacum.*
Crepis *barbata.*
— — *tectorum.*
Hyoseris *minima.* *
Hypochaeris *glabra.*
— — — *radicata.*
β) *Aculeis brevibus ac gracilibus.*
Phlox *maculata.*
— — *pilosa.*
Volkameria *inermis.*
Sonchus *palustris.*
Xanthium *spinosum.*
γ) *Aculeis brevibus, crassis et acutis.*
Convolvulus *Nil.*
Pentapetes *phoenicea.*
Tragopogon *pratense.*
— — — *Dalechampii.*
Leontodon *Taraxacum.*
Hieracium *murorum.*
Lapsana *communis.*
Serratula *arvensis.*
Cnicus *oleraceus.* *
Ageratum *altissimum.*
Chrysocoma *Lynosyris.*
Gnaphalium *Staechas.*
— — — *dioicum.*
Xeranthemum *annuum.*
Bellis *perennis.*
Chrysanthemum *corymbiferum.*
— — — — *Levcanthemum.*
Helianthus *annuus.*
— — — *multiflor.*
Rudbeckia *hirta.*
Coreopsis *verticillata.*
Calendula *officinalis.*
— — — *pluvialis.*
— — — *hybrida.*
Osteospermum *monilifer.*
Cucurbita *Pepo.*
Sicyos *angulata.*
δ) *Aculeis brevibus, crassis ac subobtusis.*

Canna *indica.*
Convolvulus *hederaceus.*
Ipomoea *Quamoclit.*
— — *coccinea.*
Hibiscus *palustris.*
— — — *pentacarpos.*
Centaurea *moschat.* fl. purp.
ε) *Aculeis longis et acuminatis.*
Sida *spinosa.*
Malachra *capitata.*
Napaea *hermaphrodita.*
Althaea *officinalis.* β.
— — *cannabina.*
Alcea *rosea.*
Malva *peruviana.*
— — *capensis.*
— — *carolin.*
— — *rotundifol.*
— — *sylvestris.*
— — *Alcea.*
Lavatera *arborea.*
— — *thuringiaca.*
— — *trimestris.*
Urena *lobata.*
Gossypium *herbaceum.*
— — — *barbadense.*
Hibiscus *Malvaviscus.*
— — *Syriacus.*
— — *Manihot.*
— — *Trionum.* α et β.
Tagetes *patula.*
Polymnia *Uvedalia.*
Rotundato-angulatus; villis brevibus, valde gracilibus et acutis.
Scorzonera *hispanica.*
Lactuca *sativa.*
Cichorium *Intybus.*
— — — *Endivia.*
Obtuse trigonus:
α) *Aculeis brevibus, crassioribus, acutisque.*
Lonicera *sempervirens.*
— — *tatarica.*
— — *Diervilla.*
β) *Aculeis gracilioribus.*
Lonicera *alpigena.*

γ) *Villis brevibus, tenuissimis acutisque.*

Scabiosa *alpina.*

— — *arvensis.*

— — *columbaria.*

— — *stellata.*

Ovalis:

α) *Aculeis brevissimis ac obtusis.*

Arctium *personata.*

Cnicus *oleraceus.* *

— — *cernuus.*

Carduus *lanceolatus.*

Onopordon *arabicum.*

Carlina *vulgaris.*

Carthamus *tinctorius.*

Senecio *vulgaris.*

— — *Jacobaea.*

— — *saracenicus.*

Anthemis *Cotula.*

Achillaea *Millefolium.*

Tetragonotheca *helianthoid.*

Parthenium *Hysterophor.*

β) *Aculeis brevibus; crassis acutisque.*

Carduus *nutans.*

— — *syriacus.* *

Bidens *tripartita.*

Eupatorium *cannabinum.*

Chrysocoma *Coma aurea.*

Tanacetum *vulgare.*

Gnaphalium *orientale.*

— — — *arenarium.*

— — — *margaritaceum.*

Conyza *squarrosa.*

Aster *Amellus.*

— — *novi belgii.*

— — *chinensis.*

Solidago *canadensis.*

— — *Virga aurea.*

Inula *Helenium.*

— — *dysenterica.*

— — *Pulicaria.*

— — *hirta.*

Doronicum *Pardalianches.*

Chrysanthemum *coronarium.*

Matricaria *Parthenium.*

Matricaria *Chamomilla.*
Anthemis *nobilis.*
— — — *tinctoria.*
Achillea *Ageratum.*
— — *Ptarmica.*
Helianthus *tuberosus.*
— — — *altissimus.*
— — — *giganteus.*
Rudbeckia *purpurea.*
Centaurea *moschat.* β.
Arctotis *aspera.*
Othonna *coronopifolia.*

γ) *Aculeis brevissimis et gracilibus.*

Valeriana *dioica.*
— — *officinal.*
— — *Phu.*
— — *sibirica.*
Scabiosa *maritima.*
Nymphaea *alba.*
Ageratum *conyzoides.*
Gnaphalium *luteo - album.*
— — — *uliginosum.*
Erigeron *canadense.*
Erigeron *acre.*
Senecio *elegans.*
Filago *montana.*
arvensis.
Viscum *album.*

δ) *Aculeis longis, gracilibus acutisque.*

Bidens *cernua.*
Gnaphalium *sylvaticum.*
Tagetes *erecta.*

Cylindraceus.

Commelina *erecta.*

Oblongus;

α) *Aculeis cylindraceis.*

Nymphaea *lutea.*

β) *Aculeis minimis, brevibus et acutis.*

Echinops *Sphaerocephal.*

Ellipticus latior:

Aculeis brevissimis et gracillimis, vix conspicuis.

Centaurea *phrygia.*
— — — *Jacea.*

§. 30. Ex hac tabulae distributione aliisque meis observationibus sequentia derivo consectaria:

a) Antherarum pulverem laevis superficiei esse frequentiorem, quam antherarum pulverem cum spinosa, licet hic floribus compositis sit familiarissimus. Fateor equidem, quod in ordine naturali, cui nomen est *Columniferae*, huc usque nullum adhuc antherarum pulverem invenerim, *Hermanniis* exceptis, cujus superficies sese mihi laevis obtulisset. Posito autem hoc, quod omnes sub illo constitutae species sint spinosae, earum tamen numerus respectu illius multorum aliorum ordinum naturalium perquam exiguus est.

Nonne ordo iste naturalis, *Compositae* sc. eo magis abundat plantis cum spinoso antherarum pulvere? Verum quidem hoc est, sed, si reputaveris, quod inter plerosque alios ordines naturales, qui conjuncti multo majorem numerum diversarum plantarum, quam iste, in se continent, laevis antherarum pulvis tam universalis, et e contrario spinosus tam rarus sit, ut eum jure pro singulari raritate habeas: mox intelliges et affirmabis, generatim laevem antherarum pulverem eum cum spinosa superficie numero longe antecellere.

b) Oblongum antherarum pulverem, cujus diversi ordines sub titulis: rotundato-ovatus, ovalis, ovatus, oblon-

gus sensu proprio, cylindraceus, ellipticus et lanceolatus, continentur, omnium esse maxime vulgarem.

c) Laevem rotundatum antherarum pulverem, licet plane non tam numerosus sit, quam oblongus, in longe pluribus tamen plantis inveniri, quam illas rariores species, quae partim sibi invicem adnatorum globulorum, partim trianguli vel quadrati formam exhibent.

d) Plurimas antherarum pulveris species cum spinosa superficie magis vel minus ad rotundam formam accedere.

e) Genera plantarum unius ejusdemque ordinis naturalis, uti in aliis partibus essentialibus, ita quoque in antherarum pulvere, inter se invicem convenire. Clare hoc perspicitur e. gr. in *Liliaceorum* ordine; Genera enim: Aloë, Hyacinthus, Colchicum, Haemanthus, Veratrum, Allium, Commelina, Tradescantia, Butomus, Lilium, Hemerocallis, Polianthes, Amaryllis, Narcissus, Fritillaria, Asparagus, Gladiolus, Anthericum etc. magis vel minus ellipticum vel lanceolatum pulverem habent. Naturalis ordo, *Compositae*, genera complectitur quorum plurimorum antherarum pulvis globosus, vel parum oblonge rotundus est.

In naturali ordine, *Columniferi* dicto, sunt genera Gossypium, Urena, Hibiscus, Lavatera, Napaea, Althaea, Alcea, Malva, Sida et Pentapetes, quae omnia perfecte rotundum

et spinosum antherarum pulverem habere mihi expertum est.

Sub ordine naturali, *Bicornes* nominato, continentur genera: Vaccinium, Erica, Kalmia, Rhododendron, Andromeda, Arbutus, Pyrola, quorum antherarum pulvisculi ex quatuor, quinque vel sex globulis compositi esse videntur.

Sub naturali ordine, *Calycanthemi* vocato, genera militant: Oenothera, Gaura, Epilobium, cum triangulari et quasi pileiformi pulvere.

Ordo naturalis, *Caryophyllei* complectitur genera: Saponaria, Dianthus, Cucubalus, Silene, Stellaria, Arenaria, etc. quorum omnium pulvis est globosus.

Sub ordine naturali, cui nomen *Asperifoliae*, sunt genera: Anchusa, Symphitum, Pulmonaria etc. in quibus antherarum pulvis sese offert, ex duobus, rarius tribus globulis continuis compositus.

Naturalis ordo, *Papilionaceae*, genera complectitur, quae plerumque cylindraceum habent pulverem. Hanc vero thesin suam etiam perpeti exceptionem, ex hoc apparet, quia

f) Plantae unius ejusdemque ordinis naturalis prostant, quae respectu ipsarum antherarum pulveris a se invicem abludunt.

E. gr. Centaureae Cyani et montanae pulvis duplici

ratione ab antherarum pulvere tam multorum aliorum, huic cognatorum generum differt; primum quidem, quod figurae est cylindraceae, deinde vero, quod laevem superficiem habet; cum e contrario figura antherarum pulveris in plerisque aliis *Compositis* globosa vel ovalis, ejusdemque superficies spinis undique obtecta est.

A pluribus illorum differt iterum antherarum pulvis Arctii aliorumque congenerum sua figura ovali, licet cum iis, quoad suas spinas conveniat.

In supradicto ordine naturali, *Calycanthemi* vocato, antherarum pulvis Lythri oblonga sua figura magnam facit exceptionem.

Genera: Sagittaria, Triglochin et Alisma ordini naturali *Liliaceorum* jure haud adscripta esse, exinde quoque elucet, quod subrotundum habeant pulverem.

g) Inter antherarum pulverem diversarum specierum, sub uno plantarum genere comprehensarum, magnam utplurimum esse similitudinem. Id demonstrant e. gr. Genera: Lysimachia, Epilobium, Oenothera, Lilium, Dianthus, Potentilla, Salvia, Chrysanthemum, Helianthus, Lobelia, Alcea, Malva, Lavatera, Hibiscus, Sida, Lathyrus, Hypericum, et alia plura. Sed quoque in contrariam partem nonnulla memorabilia exempla inveni, e quibus elucet:

h) Interdum inter antherarum pulverem duarum spe-

cierum unius ejusdemque generis naturalis maximam intercedere differentiam:

Solum jam oculorum judicium quemlibet docet, inter Mimosam sensitivam et virgatam magnam esse similitudinem, attamen pulvis prioris est subrotundus et perquam exiguus, posterioris autem oblongus, extremitatibus acutioribus, et illius respectu magnitudine sua maxime insignis. In his utrisque casibus aliquis, qui pertinax sibi proposuisset, in condendo plantarum systemate antherarum pulverem pro fundamento ponere, se coactum videret, ut maxime peccaret contra affinitatem naturalem, quia distinctae species unius ejusdemque generis naturalis, in ullo alio systemate feliciter conjunctae, vi secernendae atque per totas classes a se invicem divellendae ipsi forent.

Hoc loco certi adhuc ordinis naturalis, *Cucurbitaceae* dicti, mentio mihi erit facienda, dum non genera tantum, sed et ipsas species unius ejusdemque generis naturalis in eo animadverti, quae quoad suum antherarum pulverem a se invicem divergunt:

Antherarum pulvis Passiflorae foetidae, incarnatae et coeruleae subrotundus, in crenas quasi dissectus, suberosae e contra cylindraceus est; Bryoniae albae ellipticus laevisque, Momordicae Charantiae ovatus, Elaterii ellipticus, uterque laevis; Cucurbitae lagenariae subrotundus ac lae-

vis, Cucumeris Melonis, prophetarum et sativae obtuse trigonus et pariter laevis, atque eodem modo, ni fallor, in pluribus aliis speciebus horum generum omnis se habet. Contra antherarum pulvis Cucurbitae Peponis et Sicyos angulatae subrotundae potius est formae, spinosaeque superficiei.

Antherarum pulvis Convolvuli arvensis, canariensis et althaeoides ovalis atque laevis est; Convolvuli Nil autem et hederacei subrotundus ac spinosus.

i) saepius quoque magnam similitudinem inter antherarum pulverem plantarum ex plane diversis ordinibus naturalibus deprehendi:

Antherarum pulvis Fumariarum aeque ac ille Ericae vel Vacciniorum ex quatuor, quinque vel sex globulis sibi invicem accretis consistere videtur; num vero praeter hanc vel minima tantum similitudo inter has plantas detegi potest?

Lonicera ratione habita sui triangularis pulveris cum Circaea, Gaura, Epilobiis et Oenotheris satis convenit, licet in reliquis suis partibus ab iis plane differat.

Similis est ratio cum antherarum pulvere Cardiospermi, qui identidem trianguli formam refert; sed ubi, quae-

so, inter hoc et Loniceram, vel inter idem illud et Circaeam, Gauram, Epilobia et Oenotheras vel minima est affinitas?

k) Figuram antherarum pulveris cum figura seminum non convenire. Antherarum pulvis Rutae graveol. est oblongus, et semina angulato-reniformia; Gladioli lanceolatus, semen vero subrotundum; Cannae indicae aculeatus; semen e contrario laeve; Epilobii atque Cardiospermi trigonus, semen vero unius oblongum, et alterius rotundum. Antherarum pulvis Atropae physalod. est cylindraceus ac in medio intumidus, semen contra planum et reniforme, Allii ellipticus, et semen rotundum; Coluteae cylindraceus, ac semen reniforme; Cucurbitae Peponis subrotundus et aculeatus, semen e contrario planum et oblongum est, laeveque; et hujusmodi plura.

l) Pulverem antherarum earum praecipue plantarum ac arborum, quarum copula aëris medio vel venti ope in distans fit, plerumque globosum ac exiguae valde magnitudinis esse. Exempla ejusmodi plura praebent Monoeciarum ac Dioeciarum Classes.

Pulverem aculeatum, floribus compositis et malvaceorum ordini fere proprium, cum in finem potissimum aculeis

villisque instructum esse videri, ut insectorum corpusculis pilosis eo facilius adhaereat, quorum opera pronuba in transferendo eo in stigmata patentia ac rorida, ut in aliis plantis perpluribus, ita singulariter in Classe Monadelphiarum et Syngenesiarum semper maxima est; eandemque absolute necessariam esse in genere Iridis, Visci albi, et cucurbitacei ordinis plantis in Libellis meis germanicis: Vorläuf. Nachr. Leipz. 1761. 1763. 1764. 1766. in 8°. jam editis fusius ac omnium primus demonstravi. Generibus Althaeae, Alceae, Malvae, Lavaterae etc. mos est, ut stigmata demum prodeant ac in propatulo sint, quando pulvis antherarum flori singulo proprius jamjam penitus ab insectis absumtus est, staminaque non nisi effoeta ac emarcida restant; ast semper recens aliorum florum in promtu est, quo per ea ipsa consperguntur; nec sine his animalculis unquam impraegnatio succederet, quia pulvisculi aculeis suis sibi invicem ita impliciti sunt, ac lapparum instar inter se cohaerent, ut nec vento impetuosiore, multo minus sua sponte alio transferri possint. An id aliquid in recessu habeat, quod hujuscemodi flores nunquam proprio suo pulvere, sed semper eo aliorum suae speciei impraegnentur, merito quaeritur? Certe natura nil facit frustra.

m) Denique, quod coronidis loco addere liceat, particulas has, ut ut minutulas, non obstantibus nonnullis supra jam allatis exceptionibus, figura sua in plerisque generibus et congeneribus, eorundemque speciebus consimili, ad ulterius comprobandam plantarum affinitatem, suam etiam in universum conferre symbolam. Exempla, thesin hanc stabilientia, cuivis, tabulam praefixam vel obiter inspicienti, occurrent sane plurima.



EXAMEN LILIORUM JAPONICORUM,

INSTITUTUM

A

C. P. THUNBERG.

Conventui exhib. die 2 Maii 1810.

Inter innumeras illas plantas, quae omnes orbis terrestris plagas tegunt et incolis utilitatem praestant, semper nonnullae reperiri solent, quae magnificentia florum gloriam suam prae ceteris ostentare possunt. *Tulipis* speciosis imprimis et *Liliis* suis superbis, inter alias Bulbosas gloriatur vastissima *Asia*, et remotissimae versus Orientem insulae Japonicae, horum patria, prae aliis regionibus, plurimis speciebus videntur ditatae ac exornatae.

Horum quidem Ego, sub mea in hisce dissitis terris, per annum et dimidium commoratione, *Octo Species* collegi ac in flora mea Japonica commemoravi. At vero illas accuratius inspiciens et examinans inveni postea, plures adesse novas et incognitas Species, illas quidem amoenissimas, quam quidem initio crediderim, vel ut tales respicere, ipse species nimium multiplicare timidus, ausus fue-

rim. Sensim vero hasce sub iterato et accuratiori examine revocans, et cum ceteris communibus speciebus comparans, facile perspexi, plures esse non modo in multis dissimiles, sed etiam ab antea notis diversissimas, imprimis *candidum* dictum, *bulbiferum*, *canadense* et *philadelphicum*.

Errores igitur proprios quotidie corrigens ipse, in hisce etiam peccata mea emendare conatus fui, novum Lilii generis scrutinium institui, et species, quae in Japonia sponte vegetant, denuo descripsi ac Iconibus simul illustravi; atque hoc meum qualecumque tentamen, ut Botanicis curiosis innotescat, cum illustr. Imperiali Academia Scientiarum Petropolitana communicatum, Ejusque maturiori judicio subjectum volui.

1. LILIUM *pomponicum*.

L. foliis sparsis lineari-subulatis, floribus cernuis, corollis reflexis intus papillosis.

Lilium pomponicum. *Willden.* Spec. Plant. 2. p. 87. flor. Japon. p. 134. *Linn.* Spec. plant. p. 434.

Japonice: Santan, vulgo Fime Juri. *Kaempf.* Amoen. exot. fasc. 5. p. 871.

Crescit juxta Jedo, in Nagasaki et alibi, saepe cultum.

Florentem vidi Mensibus Maji et Junii.

Caulis teres, interdum monstrose compressus, simplex, glaber, erectus, laevis, pedalis et ultra.

Folia per caulem sparsa, frequentia, lineari-subelliptica, acuminata, erecta, glabra, digitalia et ultra.

Corolla sanguinea petalis lanceolatis, intus scabridis, villoso-papillosis.

2. LILIUM *lancifolium.*

Tab. III. Fig. 1. L. foliis alternis lanceolatis, corollis erectis subcampanulatis.

Lilium lancifolium. *Willden.* Spec. Pl. 2. p. 85. *Thunb.* Act. Societ. Linn. Londin. 2. p. 333.

Lilium bulbiferum. Flor. Japon. p. 134.

Kentan. Kaempf. Amoenit. Exotic. Fasc. 5. p. 871.

Caulis angulatus, erectus, hirsutus, simplex, purpurascens, pedalis et ultra.

Folia alterna, sessilia, lanceolata, striata, glabra, digitalia, sensim sensimque breviora; superiora subundulata et obtusiora.

Axillae foliorum superiorum bulbiferae.

Corollae subterminales, parvae, unguiculares.

Differt a Lilio *bulbifero,* cui valde simile:

1. foliis acutioribus.

2. floribus multoties minoribus.

Radix bulbosa, esculenta.

3. LILIUM *elegans.*

L. foliis alternis oblongis, corolla campanulata, petalis oblongis. Tab. III. Fig. 2.

Lilium philadelphicum. Flor. Jap. p. 135.

Lilium bulbiferum. Act. Societ. Linnean. Londinens. 2. p. 333. *Willdenow.* Spec. Plantar. 2. p. 85 et 86.

Caulis simplex, teres, laevis, erectus, pedalis et ultra.

Folia alterna, oblonga, erecta, glabra, digitalia.

Flos terminalis, solitarius, magnus.

Corolla campanulata, incarnata.

Petala oblonga apice reflexo.

Differt a Lilio *bulbifero,* cui proximum:

1. *Caule* simplici, laevi et unifloro, nec striato, diviso.
2. *Foliis* magis ovato-oblongis, alternis, remotis.
3. *Petalis* ovatis, nec inferne angustato-unguiculatis.

4. LILIUM *longiflorum.*

L. foliis sparsis lanceolatis, corollis oblongis campanulatis intus glabris. Tab. IV.

Lilium candidum. Flor. Japon. p. 133.

Lilium longiflorum. Act. Societ. Linn. Lond. 2. p. 333. *Willden.* Spec. Pl. 2. p. 84.

Japonice: Sjire, Sjiroi, Osjiroi et Siro Juri. *Siro* album et *Juri* Lilium appellatur.

Sjire, rectius Sjiroi et Osjiroi. Kaemph. Amoen. exot. 5. p. 870.

Crescit prope Nagasaki, Miaco, alibi.

Floret Junio.

Caulis simplex, apice bifidus, erectus, fistulosus, teres, glaber, pedalis.

Folia sparsa, frequentia, lanceolata, acuminata, glabra, integra, supra laevia, subtus tricostata, erecta apice patulo, vix digitalia.

Flores plerumque bini, terminales, subcampanulati, albidi, erecti; *Corollae* tubus palmaris, sensim ampliatus.

Differt 1°. a Lilio *candido: foliis* basi latioribus, strictioribus, reflexis, nec undulatis; atque *Corolla* triplo longiori, subcylindrica.

2°. a Lilio *bulbifero: corolla* maxima, alba et *caule* tereti laevi.

5. LILIUM *maculatum.*

Tab. V. Fig. 1. L. foliis verticillatis lanceolatis, floribus erectis, corollis campanulatis apice reflexis.

Lilium canadense. Flor. Japon. p. 135.

Lilium maculatum. Act. Societ. Linn. Londin. 2. p. 334.
Willden. Spec. Pl. 2. p. 89.

Japonice: Kentan, vulgo Oni Juri et Jamma Juri.

Crescit hinc inde in sylvulis, Nagasaki montibus et alibi.

Floret Junio, Julio.

Caulis simplex, apice divisus pro floribus, sulcatus, glaber, erectus, pedalis et ultra, crassitie digiti.

Folia verticillata, sessilia, lanceolata, parum inferne attenuata, integra, supra laevia, subtus nervosa et pallidiora, erecta, digitalia.

Flores ex apice caulis quatuor vel quinque, pedunculati, erecti.

Pedunculi longitudine foliorum.

Corollae campanulatae, sanguineae, intus purpureo-maculatae; laciniae apice reflexae.

Differt manifeste a Lilio *canadensi*, cui simillimum:

1. *foliis* lanceolatis, nec ellipticis.
2. *floribus* erectis, nec cernuis; *corollis* apice tantum reflexis; *petalis* que latioribus, nec lanceolatis.
3. *caule* striato, vel potius sulcato, nec laevi.

6. LILIUM *japonicum.*

L. foliis alternis lanceolatis, corollis cernuis campanulatis. Tab V. Fig. 2.

Lilium Japonicum. Flor. Japon. p. 133. *Willden.* Sp. Pl. 2. p. 85.

Japonice: Tametomo Juri.

Crescit juxta Miaco et alibi, saepe cultum, formosissimum.

Floret Junio et sequentibus aestatis mensibus.

Caulis teres, simplex, laevis, glaber, bipedalis.

Folia alterna, rarius opposita, subpetiolata, lanceolata, acuminata, integra, marginata, glabra, spithamaea; supra viridia; subtus pallida, quinquenervia.

Flos terminalis, reflexo-cernuus, amplus.

Corolla campanulata, albida, palmaris petalis ellipticis.

Affine Lilio *candido;* differt vero

1. *foliis* paucis, remotis, longissimis, subpetiolatis, nervosis et
2. *caule* debiliori, tenuiori ac unifloro.

7. LILIUM *speciosum.*

L. foliis alternis ovato-oblongis, floribus cernuis, corollis reflexis, caule ramoso.

Lilium superbum. Flor. Jap. p. 134.

Lilium speciosum. Act. Societ. Linn. Londinens. 2. p. 332. *Willden.* spec. Plant. 2. p. 86.

Japonice: Kasbiako, vulgo Konokko Juri; it. Korei Juri. Kaempf. Amoenitat. Exotic. Fasc. 5. p. 871.

Konokko Juri. Kaempfer. Icon. select. tab. 47.

Crescit juxta urbem Nagasaki et alibi, cultum saepe ob speciosos suos flores, quibus ornant Piscatores et navigantes naviculas, ut avertentur infortunia.

Floret Junio et insequentibus mensibus.

Caulis teres, laevis, glaber, superne ramosus, subpaniculatus, tripedalis vel ultra, crassitie pennae anserinae.

Rami alterni, divaricati, erectiusculi, cauli similes, apice reflexi.

Folia caulina alterna, subpetiolata, basi complicata, ovato-oblonga, acuta, integra, glabra, patentia; supra laevia; subtus pallida, quinquenervia; *ramea* sub singulo ramo et in medio pedunculi multo minora et angustiora.

Petiolus depressus, vix semiunguicularis.

Flores in apicibus ramorum terminales, solitarii, speciosissimi.

Corollae revolutae.

Petala oblonga, acuta, incarnata, maculis magnis purpureis et minoribus nigris a medio ad basin adspersa, bipollicaria. *Carina* nectarea barbata.

Filamenta sex, subulata, alba, longitudine fere corollae.

Antherae lineares, unguiculares, incumbentes.

8. LILIUM *cordifolium.*

L. foliis cordatis petiolatis.

Lilium cordifolium. Act. Societ. Linn. Lond. 2. p. 332. *Willdenow.* Spec. Plant. 2. p. 84.

Hemerocallis cordata. Flor. Japon. p. 143.

Sjire, rectius Sjiroi et Osjiroi. Kaempf. Amoen. Exot. Fasc. 5. p. 870. Icon. Kaempfer. Select. Tab. 46.

Caulis teres, erectus, superne pro floribus divisus, bipedalis et ultra.

Folia alterna, petiolata, cordata, ovata, acuminata, integra, glabra, inaequalia, pollicaria usque spithamaea.

Petioli teretes, erecti, spithamaei.

Flores in ramis terminales, erecti.

Capsulae ovatae, erectae, pollicares vel paulo ultra.

SUR LES PIERRES ALUMINEUSES DES MONTS ARARATS.

PAR

B. SEVERGUINE.

Présenté à la Conférence le 9 Mai 1810.

Parmi les mines d'alun, celles qui sont connues sous le nom de Pierres alumineuses, meritent d'autant plus notre attention, qu'au premier coup d'oeil, elles ne semblent pouvoir rien fournir de ce sel terreux.

Les monts Ararats qui ont éxercé la sagacité d'un de nos plus célébres chimistes et naturalistes (le Comte de *Moussin - Pouschkin*) et dont on a deja retiré tant de produits remarquables *), nous présentent encore quelques nouvelles variétés (si non des espèces particulières) de pierres alumineuses qui différent de celles connues jusqu'à présent.

Un officier engagé autre fois au Service de Mr. le Comte de *Pouschkin*, m'ayant fourni quelques échantillons

*) Entre autres l'Yberite de Mr. *Schlegelmilch*, les Basaltes de formation particulière, l'obsidienne transparente et chatoyante etc. etc. Voyez le Journal téchnologique Tome III. Cahier III. Et mon Essay d'une minéralogie géographique de Russie. Tome II. à l'article de *Géorgie*.

de ces substances, je m'empresse d'en donner ici la desciption d'autant plus que la singularité de leur aspect, fait qu'on n'y pourroit avoir le moindre soupçon d'un sel alumineux.

J'en ai rémarqué cinq variétés, qui cépendant peuvent être reduites à trois principales dont l'une est homogène et les deux autres ont l'air d'une brêche d'un mêlange plus ou moins grossier.

1re Varieté.

Pierre alumineuse jaspitique.

Couleur. Rouge foncé par toute la masse.

Apparence extérieure. En masses compactes informes.

Apparence intérieure. Terne.

Cassure. Inégale, avec une tendance à être égale, écailleuse (splittrig) et passant même à l'aspect conchoideux; les écailles sont à peine perceptibles.

Brisûre. En morceaux irreguliers à coins aigûs.

Transparence: Opaque même vers les coins.

Dureté. Rayant fortement le verre, donnant quelques étincelles avec le briquet et se laissant difficilement racler par le canif.

Fragilité. Celle d'un *jaspe.*

Attouchement. Rude.

Pesanteur. Moyenne.

Odeur. Etant humectée elle donne une odeur argilleuse.

Happement à la langue. Presque nul.

Les morceaux nouvellement detachés se recouvrent bientôt d'une poussière blanchâtre.

2de Varieté.

Pierre alumineuse opaline.

Couleur. Grisâtre, avec des taches blanches bleuvâtres ou laiteuses.

Apparence extérieure. En masses compactes informes.

Apparence intérieure. Terne, avec quelques parcelles hétérogènes luisantes.

Cassure. En général inégale et raboteuse, mais lisse dans les parties blanchâtres et écailleuse dans les parties grisâtres.

Brisûre. En morceaux irréguliers à coins, assez tranchans.

Transparence. Un peu translucide vers les coins surtout dans les parties blanchâtres.

Dureté. Rayant le verre et donnant quelques étincelles par le choc du briquet, mais se laissant en même temps entamer par le canif.

Fragilité. Se laissant aisement casser.

Attouchement. Un peu sec dans les parties grisâtres, mais assez gras dans les parties blanchâtres.

Pesanteur. Moyenne.

Odeur. Humectée elle a une odeur argilleuse.

Happement à la langue. Nul.

Elle contient en outre de taches de couleur jaune d'une substance hétérogène qui semble être du souffre oxydé ayant un gout très peu styptique.

3me Varieté.

Pierre alumineuse en brèche.

Couleur. Rouge foncée comme celle du N°. 1. avec des plaques rondes de couleur fauve et semblables au *Silex.*

Apparence extérieure. En masses compactes informes.

Apparence intérieure. Terne et terreuse dans les parties fauves.

Cassure. Inégale et passant au terreux et à l'écailleux dans les parties foncées, mais lisse et encore plus écailleuse dans les parties fauves avec des écailles assez grosses, plus claires et de couleur de cire jaune.

Brisûre. En morceaux irréguliers à coins assez aigûs dans les parties foncées, mais plus aigûs dans les parties fauves.

Transparence. Opaque dans les parties foncées, et translucide sur les coins dans les parties fauves.

Dureté. Donnant quelques étincelles par le choc du briquet dans les parties foncées, et se laissant racler par le canif sur tout dans les parties fauves.

Fragilité. Assez difficile à casser.

Attouchement. Un peu sec dans les parties foncées et plus gras dans les parties fauves.

Pésanteur. Moyenne.

Odeur. Humectée elle a une odeur argilleuse.

Happement à la langue. presque nul.

Etant mise dans de l'eau chaude, les plaques fauves deviennent transparentes, sur tout vers les coins, à peu près comme l'Hydrophane, comme en général, elles sont évidemment de nature différente de celle de la patte qui est la même avec celle du N°. 1., de sorte qu'elles n'y semblent être qu'encaissées, mais adhérant fortement à la patte et ne faisant qu'une masse contigûe avec cette dernière.

Deux sous-variétés.

La patte est la même; elles ne diffèrent que par l'arrangement des taches ou plaques hétérogènes, mais toujours de même nature que dans la précédente:

a) A plaques allongées brun-jaunâtres, ayant quelque tendance à l'air schisteux.

b) Marbré, à taches plus ou moins rondes de couleur blanche grisâtre ou jaunâtre.

J'ai deja dit qu'étant mises dans de l'eau, les taches que renferme la patte, acquiérent quelque transparence.

Les acides ne font point d'effervescence ni avec la patte, ni avec la matière qui forme les taches rondes.

Après avoir été chauffées parmi des charbons ardens, elles se recouvrent d'une poussière blanchâtre ayant une saveur légèrement styptique.

Toutes ces variétés viennent d'une minière nommée *Zaglinskoy* dans les Ararats *), d'où on les exploite effectivement pour la fabrication de l'alun.

Leur gissement est inconnu. Les pierres alumineuses de la Tolfa se trouvent dans un terrein volcanique. Les monts Ararats ne sont pas exempts de pareilles indices, du moins on sait qu'on y trouve des Basaltes, des obsidiennes et d'autres substances analogues aux productions volcaniques. Il ya du jayet, en abondance, près de Tiflis.

*) On sait que les monts Ararats possèdent des mines d'or, d'argent, de cuivre, de plomb, de fer; la note qui m'a été communiquée indique que les toutes (les mines d'alun inclusivement) se trouvent dans une étendue de près de 300 werstes.

REMARQUES SUR LE CRANE DU BISON MUSQUÉ,

PAR

N. OZERETSKOVSKY.

Présenté à la Conférence le 23 Mai 1810.

Il est connu, qu'on trouve en Sibérie des cranes du Bison musqué, qui n'y existe plus. Mr. *Pallas* en a donné une très exacte description dans le XVII tome des nouveaux Commentaires de l'Académie, desorte qu'il n'y a rien à y ajouter; mais comme les cranes, que Mr. *Pallas* avoit obtenu en Sibérie, étoient destitués des cornes, et plusieurs dents leur manquoient; par cette raison il ne sera pas superflu, de donner une nouvelle figure du Crane du Bison, trouvé à l'embouchure de la rivière Yana, et envoyé à l'Académie par S. E. M. le Comte N. P. *Roumiantzow* le 28 d'Octobre 1809. Ce crane possède presque toutes les parties, excepté que les os du museau et de la machoire supérieure ont perdu leurs extrémités, et que les cornes depuis leur bases jusqu'au milieu sont écorchées, desorte que leur substance est un peu rongée; au reste,

toutes les dents molaires de la machoire supérieure se sont si bien conservées, qu'un animal vivant ne pourroit pas les avoir meilleures; elles sont tout-à-fait blanches; et le crane en général paroit tel, comme s'il sortoit de mains d'un Anatomicien, qui en prépareroit un squelette. Peut-être le froid de Sibérie a exterminé les Bisons musqués, et le même froid a conservé leurs os. Il me paroit beaucoup plus probable que ces animaux existoient autrefois dans nos pays septentrionaux, que de supposer, qu'ils y aient été tansportés d'une autre région; car toutes les hypothèses qu'on a imaginées pour expliquer l'origine des ossemens des Mamonts, des Rhinoceros etc. nous entrainent dans l'incertitude et ne nous laissent que des doutes; au lieu que les ossemens qu'on trouve en Sibérie, nous présentent des preuves incontestables, qu'il y avoit jadis des animaux, qui ne s'y trouvent plus. Ainsi, après Mr. *Pallas*, il ne me reste que d'exposer les dimensions de quelques parties de ce crane, pour faire voir quelques petites différences entre les cranes que Mr. *Pallas* a decrites, et entre le crane, dont je présente les figures.

Tab. VI. Fig. 1. Fig. 2. Il y en a deux: la première représente la partie supérieure du crane, et la seconde en montre le dessous. La machoire inférieure s'est détachée, et il est possible de la

trouver dans la terre gelée de Sibérie, si les animaux carnassiers ne l'ont pas devoré.

	Pouces.	Lignes.
Le Crane, mésuré par dessus depuis les bouts des cornes, entre leurs bases, qui débordent l'occiput, jusqu'à l'extrémité de l'os nasal, en longueur — — — — —	17.	—
Depuis le trou occipital jusqu'au reste de la machoire — — — — —	18.	—
Longueur de chaque corne — — —	25.	—
Circonférence des cornes à la base — —	18.	—
Circonférence du crane, prise par les orbites des yeux — — — — —	27.	—
Largeur du crane entre les bords des orbites	9.	5′.
Diamètre transversal du museau à sa base entre les sutures des os nasaux et lateraux	3.	6′.
Largeur du palais entre les dents molaires postérieurs — — — — —	3.	2′.
Largeur entre les dents molaires inférieurs —	2.	2′.
Diamètre transversal de l'occiput près de la base des cornes — — — — —	6.	—
Diamètre par dessus le trou occipital —	4.	4′.
Diamètre vertical depuis la base des cornes jusqu'au trou occipital — — —	7.	3′.

		Pouces.	Lignes.
Largeur transversale du trou occipital	—	1.	2′.
Longueur des alveoles de six dents	—	5.	5′.
Hauteur de l'arcade orbitaire au dessus du crane		2.	2′.
Espace entre l'ouverture de l'occiput et les trous déchirés	— — — — —	4.	—

Pésanteur du crane entier 28 livres.

DE GANGLIO RAMI DESCENDENTIS NERVI HYPOGLOSSI MEDII.

AUCTORE

P. ZAGORSKY.

Conventui exhib. die 6 Junii 1810.

Scientia anatomica ad tantum perfectionis gradum, nuperis maxime temporibus, evecta est, ut vix augminis quid nunc capiat per inventa nova: per observationes tamen de variis corporis humani partium alienationibus, quae physiologis et medicis scitu haud inutiles sunt, indies crescere et ampliari non desinit.

Istiusmodi observationum ab anatomicis collectarum, et speciatim a me antehac descriptarum, commentariisque academicis insertarum, numerum aucturus, adjungo insignem varietatem circa nervum hypoglossum medium observatam, quam ob summam raritatem publici juris facere, mei muneris esse credidi. Deviationes qualescunque, tantomagis insigniores, longe rarius in nerveo quam in vasculoso systemate aliisve partibus occurrere, et, si quae occurrunt, frequentius in mixtis, quos vocant, nervis offendi, constat inter anatomiae cultores. Quem enim eorum

fugit, nervum exempli gratia sympathicum magnum, qui inter mixtos primum locum tenet, non raro ludere quoad numerum radicum ortus ejus ex sexto pare nervorum cerebri, tum quoque quoad numerum, formam et molem gangliorum cervicalium? Id quod etiam, ratione numeri filamentorum originem praebentium, de nervo phrenico, de accessorio ad par vagum, et de sympathici magni sobole, quae omnibus abdominis visceribus prospicit, nervo scilicet splanchnico, non immerito dici potest. Quid quod sympathicus ille magnus, aeque ac diaphragmaticus nervus, duplex aliquando est visus. Quod autem reliquos, mixtis exceptis, nervos spectat, graviores illorum varietates omnino raras esse, inde convincor imprimis, quod pauciora hujus generis exempla in scriptis anatomicorum exstent, et mihi in multitudine cadaverum dissectorum unus tantum infra descriptus, majoris ponderis casus sese obtulerit.

Ganglion, quod huic observationi ansam dedit, observatum est a me circa nervum lingualem medium in cadavere hominis adulti, sicque se habebat. *Ramus* nempe *descendens* 9 paris nervorum cerebrinorum, a trunco suo separatus, interque venae jugularis ramos et carotidem progrediens, cum attigerit musculum sterno-thyreoideum, facta exteriora versus parva flexura, ablegatoque prius sur-

culo ad m. omo-hyoideum, intumuit, super media circiter parte sterno-thyreoidei musculi, in ganglion. In illo loco hoc contigit, ubi ramus descendens, acceptis ramis a secundo et tertio cervicali, nonnunquam etiam a nervo vago et magno intercostali filis anastomicis mutuatis, arcum utplurimum, vel rariore eventu plexum formare solet. Ganglion nostrum erat oblongum, ad figuram ovalem accedens, subrubellum, seminis cannabis magnitudine, situm oblique, ita ut altera extremitate, tenuïore, ramo descendenti continua, sursum nonnihil et introrsum, altera crassiore, rotundiore, deorsum simulque extrorsum spectaret, et duobus ramis cervicalium quasi interciperetur: nam ramus a secundo cervicali in superiorem, qui autem a tertio pare provenit, per venam jugularem internam migrans, in duo filamenta fissus et postea iterum junctus, in inferiorem partem extremitatis exterioris ganglii, implicabantur.

Ex hoc ganglio quatuor surculi, ex superiore unus et tres ex inferiore ora emergebant, non computato illo, qui circa ipsam rami descendentis intumescentiam, ex flexura ejus exortus, sub omo-hyoideo repens, et divisus in duos ramulos, distribuebatur in musculo sterno-hyoideo. Surculus, ex parte superiori ganglii surgens, brevis et exilis, immergebat se carni musculi sterno-thyreoidei; inferiorum *primus*, respectu scilicet habito ad originem a superioribus

versus inferiora, perdebatur in omo-hyoideo, *secundus* seu medius, initio simplex, pone hunc musculum pergebat in superficie sterno-thyreoidei, et dehiscebat in duos ramulos, quorum superior in anteriore, inferior, irretito parvo surculo musculo sterno-thyreoideo, in posteriore superficie sterno-hyoidei, impendebantur; denique *tertius* surculus ex inferioribus, implicationi rami paris tertii cervicalium in ganglion proximus, et quasi communi trunculo cum medio ramo incipiens, mox in duos ramulos partiebatur; horum alter in m. omo-hyoideo peribat, alter, ejusdem musculi marginem externum, cui per textum cellulosum adhaerescebat, sequens, emetiebatur sat longum iter, et, quamvis omnis cautela erat adhibita, tenuissimus factus rumpebatur. Quam obrem non potui hunc ramulum ad ultimum finem persequi, puto tamen illum fuisse eum surculum, qui cum nervo phrenico communicationem habet.

Hoc in ramo descendente nervi hypoglossi lateris dextri observavi, socius autem ipsi sinister nervus solitum statum et modum servabat.

Num mihi primo licitum sit ganglion hoc observasse, contendere non audeo; saltem in pluribus operibus anatomicis, quae antea legi et non pridem ex industria perlustravi, nullam ipsius mentionem inveni; nec, nisi prima hac vice, ganglii quid simile in ramo descendente, per

tria fere lustra, ex quo tempore anatomiam colo, unquam vidi.

Ad dilucidandam ganglii hujus et ramorum, ex ipso orientium, descriptionem, adnecti delineationem necessum duxi.

Tabula VII.

Sistit caput et collum a latere dextro, ubi conspiciuntur:

A. Vena jugularis interna cum suis ramis.

B. Carotis.

C. Nervus hypoglossus medius.

D. Ramus ejus descendens.

E. Surculus ab hoc ad partem superiorem musculi omo - hyoidei.

F. Flexura parva rami descendentis, ex qua surculus ad m. sterno - hyoideum.

G. Ganglion rami descendentis.

H. Ramus secundi paris cervicalium, extremitati superiori,

I. Ramus tertii cervicalis, inferiori extremitati ganglii implicitus.

K. Ramus s. surculus superior ganglii ad m. sterno - thyreoideum.

L. Surculus, inferiorum a ganglio orientium primus ad omo - hyoideum.

M. Surculus secundus, sub omo - hyoideo migrans, in superficie sterno - thyreoidei, ad utramque superficem sterno - hyoidei.

N. Ramus tertius ex inferioribus, in suo initio bipartitus, et uno ramo musculo omo - hyoideo prospiciens; alter eorum juxta marginem ejusdem musculi descendit et abrumpitur.

PISCIUM CAMTSCHATICORUM DESCRIPTIONES ET ICONES.

AUCTORE

TILESIO.

CUM TABULIS VI. AENEIS.

Conventui exhib. die 19 Septembris 1808.

Gasterosteus cataphractus Oceani orientalis nova species marina. (*Gast.* aculeatus marinus.) Tab. VIII. Fig. 1.

Obolarius aculeatus Stelleri (Observ. ichtyol. Mscrpt. II. H. nº. XV.)

Gasteracanthus cataphractus Pallas. (Faun. Ross. Asiat. Mscrpt. Tom. III. nº. 170. Tab. XLIX. fig. 2.)

Camtschadalis *Chákal*, Ruthenis ibidem (Хахальча) *Chachaltscha* diminutive vel corrupte dictus.

G. aculeis mobilibus binis ventralibus, tribus dorsalibus, postico minori; lamina utrinque, instar Oboli nummi argentea, inter pinnam et operculum branchiarum; corpore loricato, linea laterali versus caudam sensim elevata, carinata et in pinnam quasi cartilagineam lateralem utrinque producta, *pinna caudae rhomboidali.*

M. B. r. 4. Pin. pect. r. 10. P. Dors. r. 13. P. A. r. 10 — 12. P. Caud. r. 12.

Gasterostei scombris affines ob habitum, iisdem et in hac specie pusilla Camtschatica per pinnam lateralem cartilagineam ex linea laterali versus caudam carinata (more Scombri) ortam approximantur. A congeneribus vero per structuram loricae dorsalis, ventralis et caudae nec non per aream argenteam, a *Stellero* cum Obolo, nummulo argenteo Graecorum comparatam, per quam pinnae pectorales ultra dimidium corporis a capite removentur, facile distinguitur.

Pisciculus quadripollicaris et raro quinquepollicaris, pondere bidrachmalis, gregarius, marinus, Camtschaticus exeunte hyeme et circa solstitium praesertim copiosus, ostia fluviorum Camtschatca, Avatscha et Paradunca ascendens, erectis aculeis omnibus subsultans natat, aculeos ventrales loco pinnarum movet, iisdemque velut ramis utitur. Plura hujus speciei individua d. 4to mensis August. 1804 mihi allata sunt in portu divi Petri et Pauli.

Descriptio.

Caput longum, acuminatum, compressum, supra cathetoplateum, scutis osseis cordiformibus striato punctatis loricatum, subtus carinatum, *maxilla superior* angulo obtuso cum ore obliquo descendens, unica serie dentium armata, maxilla *inferior* ascendens, paulo prominens, serie duplicata denti:

culorum anterius armata. *Rictus* angustus - angulo palati denticellis granulato. Vertex, rostrum et laminae maxillae superioris laterales orbitis magnis pertusae punctis prominulis scabrae.

Oculi magni, ovales, laterales iride argentea. *Nares* exiles, simplices, mediae inter rostrum et oculos. *Corpus* gracile forma et habitu Gasterostei aculeati L, cataphractum, compressum, versus caudam attenuatum, laminis osseis striato punctatis 28 ad margines denticellatis loricatum. *Laminae* oblongae, circa medium in angulos mucronatos lineam lateralem formantes productae, totum corporis et caudae latitudinem occupantes, imbricatim superimpositae et striatae nec non ad margines serrulatae sunt. *Lorica abdominalis* utrinque duobus ossibus acutangulum formantibus longioribus conflata, punctato - radiata, *pectoris ossa* duo adsunt striata, carinam formantia. *Sternum* crassum utrinque fossa articulari pro suscipiendo aculeo ventrali instructum est, aeque ac in dorso fossae articulares adsunt, in quibus aculei dorsales tres veluti ginglymo suscipiuntur ac in iis erigi et pro lubitu piscis reclinari possunt. *Aculei ventrales* majores ad basin dilatati ad marginem exteriorem serrulati; erecti, retinaculo articulationis retenti, difficulter deprimuntur, reclinati sterno arcte adprimuntur.

Aculei dorsales tres minores, anteriores subaequales, posterior minimus, ad basin latiores, utrinque subtilissime serrati et punctulis scabri. *Linea lateralis* dorso vicina et paralella, versus caudam elevata, cartilagineo-carinata et connàtis ultimis laminarum, quibus cauda utrinque loricata est, mucronibus — denique pinnata, caudam carinato-quadratam efficit.

Area argentea suborbicularis, in qua *Stellerus* Obolum vidit et piscem Obolarium inde appellavit, inter operculum et pinnas pectorales cernitur glabra. *Opercula branchialia* ipsa striata bilamellata, priori angusta, posteriori lamellata, angulo rotundato aream tangente, arctissime clausa. *Flabella branchiostega* quadriradiata utrinque operculo tecta subtus connata. *Pinnae pectorales* a capite remotiores ac in omnibus reliquis congeneribus speciebus, imo intercessa area argentea, remotissimae, magnae, subrotundae, diaphanae, decemradiatae radiis simplicibus, subaequalibus. *Pinna dorsalis* versus caudam remota, tredecimradiata, radiis prioribus triplo longioribus. *Pinna ani* brevior dorsali fere opposita, decemradiata radiis prioribus aeque longioribus. Ad basin radiorum pinnae dorsalis et analis tubercula aspero-muricata.

Caudae pinna rhomboidalis admodum distincta et singularis, bifurcata et non raro trifurcata, duodecim radiata,

radiis inaequalibus, mediis plerumque longissimis. *Color* recentis pisciculi coeruleo argenteus, area argentea, a *Stellero* cum Obolo comparata, splendissima, versus ventrem laminae, quibus corporis latera transversim loricata et splendore metallico ornata sunt, aureo nitent. Dorsum et caput in vertice coeruleo chalybaeum.

Dimensiones ulteriores, quae ex icone ipsa ad vivum picta et naturali magnitudine exarata prodeunt, adjiciendi, superfluum duxi. Cum vero iis temporibus, quibus in portu Divi Petri et Pauli Camtschatico cum anatome Mytili edulis, Actiniae giganteae, Balani cornuti gigantei, Asteriae et echini et piscium majorum occupatus fuerim et praeterea coactus, nova ibidem reperta ad naturam delineandi et vivis coloribus pingendi; fieri non potuit, quin et minora animalia dissecarem eorumque anatomen adjicerem. Ex observationibus beati et quondam indefessi *Stelleri* (s. manuscriptis) cui diutius ibi commorari licuit, hunc defectum optime complere possumus. Quam ob rem lectoribus ichtyophilis ipsas *Stelleri* immortalis observationes in pisciculum nostrum institutas, ex schedis ejusdem excerptas legendi haud ingratum fore spero.

Stelleri descriptio Obolarii aculeati, pisciculi marini, qui pondere medicinali ut plurimum drachmas duas, interdum et unam cum duobus scrupulis quatuordecim vel sedecim granis pendet.

Pisciculus hic, insolitam per suam et singularem formam, ab omnibus primo intuitu cognoscitur: paucis saltim notis indicatis, nec mensuris tot opus fuissit, nisi verbis pingere ejusque formae ideam imprimere vellem iis, quibus nec piscem nec iconem ejus videre contingit.

Medii digiti longitudinem non multum excedit, latitudo maxima ad longitudinem quintupla, a valvae branchialis cardinibus ad anum usque ejusdem fere latitudinis. Caput versus os et *cauda* versus pinnam acuminatum et ad exortum pinnae e linea laterali ortae, *rhombi istar quadrata,* latera reliquum plana ac valde compressa. Dorsum a capite ad caudam usque leviter arcuatum, ventris carina fere non rectilinea, recens ex aquis extractus purissimi argenti instar splendet, siccatus paululum in dorso nigrescit, recens olivacea fuscedine tectus, in lateribus coerulescentia diluta suffunditur, pinnae omnes albae. Maxilla inferior sursum curvata, superiori tam clauso quam aperto ore longior, utriusque limbi denticellis minutissimis, absque microscopio non conspicuis, serrae instar, exasperantur. Lingua brevis, alba, teres. Nares simplices, in fossa cutanea,

ovali, medio inter oculos et extremum rostrum spatio sitae, papaveris semen vix transmittentes. Oculorum diameter idem, quod spatium inter oculos et frenum oris. Iris argentea, maculae sanguineae in oculis revera accidentales sunt, in multis sunt, in aliis non sunt, pupilla latiuscula diaphana lucidissima, nec multorum dierum lapsu obscuratur. Frons et vertex osseis lamellis teguntur pulchre radiatis, corii Cordubani instar, pariter ac totum dorsum, sed discretis nec in madido pisciculo ita prompte obviis, quam in extincto post aliquot horas. Os, trianguli forma, aperitur. Appendix frenalis freno ita arcte affigitur, ut aegre discernatur ac os tubulosum emissile pene videatur Valva branchialis e duobus ordinibus lamellarum et 3 lamellis conflatur. Tegulae imbricatae quatuor, vix visibiles, fere ad dimidium internae valvae branchialis lateri - adnatae, reliquum omne sub mento cute clauditur, concha branchialis arctissime clauditur. Inter branchialem concham et pinnam branchialem utrinque latissima et laevigatissima area cernitur, quae in exsiccato squama videtur, oboli seu hastulae argenteae figurae, unde et Obolarii nomen indidi. Pinna branchialis utraque 10 radiis simplicibus membrana alba diaphana tenuissima connexis conflata, longior reliquis pinnis, sursum versus dorsum oblique flectitur, ita, ut primus radius ad medium dorsum pertingat post dorsi acu-

leum secundum qui accurate dimidia piscis longitudo. Pinna dorsalis unica tertiam longitudinis partem inchoat, radii omnes versus caudam flectuntur, primus radius reliquis longior. Pinna ventralis unica immobilis, ossea, acuminata, trigona, intra duos aculeos recondita. Centrum harum pinnarum dat centrum piscis secundum longitudinem, situ in ipsa ventris carina, enascitur secus, ac in omnibus fluviatilibus. Pinna analis statim ab ano incipit, et tantum a pinna caudae distat, quantum ipsa ad basin lata. Linea lateralis tot punctis constat, quot sulcis piscis latera secantur. A superiore valvae branchialis cardine utrimque arcuata ad caudam tendit, ibique, quod plane singulare, ubi dorsi et ani pinna desinunt, in pinnam arcuatam assurgit et piscem rhomboidea quadratura angulosum reddit situ ad caudae et dorsi pinnam transverso, linea autem toto arcuato tractu suo, summo dorso ita vicina, ut si latitudo laterum in 5 partes dividatur; 4 regiones infra lineam, unica tantum supra lineam sit. Caudae pinna forcipata. Praeterea notabiles 6 aculeis longis validis pyramidalibus asperis et ad oras utrinque serratis, quorum primus in dorso, tertiam longitudinis partem inchoat, alter spatio tantum a priori distat, quantum uterque longus, tertius ad initium pinnae dorsi brevis, unicuique ad basin tenuissima membranula diaphana subtendit, cujus ope re-

trahitur aculeus et in sulcum dorsi reconditur, reliqui duo utrinque ad pinnam ventris locantur et sextus perexiguus statim post anum. Latera a dorso versus ventrem triginta circiter sulcis, agri instar, scamnantur, qui sulci totidem spinae sunt, quibus musculosa piscis substantia suffulcitur, ut veluti lorica indutus piscis appareat: inter sulcos totidem squamae oblongae, quadratae, argenteae, undique firmiter accretae nec ullibi liberae. Anus tertiam longitudinis partem inchoat.

Dimensiones pisciculi marini Obolarii aculeati Stelleri vel Gasteracanthi cataphracti Pallassii.

	Scal. Angl. poll.	dec.
Longus a capite ad extremam caudam . . .	4	7
—— ab apice labii inferioris ad nares . . .		2
—— — — — ad oculos . . .		$1\frac{1}{2}$
—— — — — ad nucham . . .		$9\frac{1}{2}$
—— — — — ad cardinem superiorem valvae branchialis . .		9
—— — — — ad pinnas ventrales .	1	5
—— — — — ad initium pinnae branchialis	1	2
—— — — — ad pinnam analem . .	2	5
—— — — — ad aculeum primum dorsi .	1	3
—— — — — ad aculeum secundum dorsi .	1	6
pinnae dorsalis basis lata		9
—— branchialis basis lata		2
—— branchialis basis longa		8
—— analis basis lata		4
latus piscis ad primum dorsi aculeum		7
— — — secundum dorsi aculeum . . .		8
crassus piscis ad secundum dorsi aculeum . . .		

Observationes anatomicae.

Ventre aperto apparuerunt: Pleura argentea multis nigris punctis varia. Cor statim sub branchiis pallidissimum, prismaticum, oblongum. Ventriculus sine ulla reflexione et appendicibus recta tendit ad anum, quin imo totus canalis intestiororum a gula ad anum fere unius ambitus et crassitiei. Sub ventriculo pancreas peramplum linguae forma, vesica anemia simplex.

Ovaria buxei coloris utrimque ad latera. Par pinnarum pectoralium utrimque robustissimo (trigastrico) intus musculo firmatum. (Musculus idem est, de quo in descriptione dixi et qui membrana argentea obductus extus aream, a *Stellero* cum Obolo Graecorum comparatam, format.). Branchiae quaternae, utrimque interna, qua os spectant, parte, crenatae. Hepar pallidissimum trifidum. Lien magnitudine seminis sinapios. Fel succini colore, ejusque receptaculum ad infimam partem hepatis adhaeret, ex altera parte statim sub pyloro ductu se in intestinum, ibique multis spiris circularibus cinctum, insinuat.

Annotationes oeconomico - historicae.

Gregarius est hic pisciculus marinus ac circa solstitium tantis catervis Awatscham, Paraduncam et Camtschatcam fl. ascendit, ut ex aquis hauriatur non aliter ac

aqua ipsa; in littore sinus Penschinensis rarissimus cernitur. Natat erectis aculeis omnibus et cum pinnam ventralem non habeat sed loco ejus triangulum osseum aculeis binis inarticulatum, aculeos movet ac idem praestat, quod alii pisces pinnis extensis, imo natando continuo salit et extra aquas prosiliens conspicitur. Licet elixus sapidissimus sit, et ad jusculum albidum parandum aptissimus; nihilo minus tamen plurimam partem canibus in victum hyemalem cedit, quia absque ullo labore colligitur et ad solem exarescit, nec unquam corruptioni obnoxius est. Pisciculus Camtschadalis *Chakal* dictus, Ruthenis ibidem corrupta et diminutiva voce *Chakaltscha.*

Annotationes, ulteriores anatomicae et physiologicae.

Chakal piscis 31 habet vertebras totidemque squamae vel scuta, quibus corporis latera loricata sunt veluti Dasypus novemcinctus (Armadillo) et quibus subjecti musculi dorsi et abdominis ad caudam usque obteguntur. Cerebrum gasterostei nostri ex globulis septem sphaericis compositum est, quorum quatuor forma crucis dispositi et superius sub cranio tres in triangulum positi sunt. Sub his quatuor alii globuli medullam oblongatam formantes adjecti sunt. Licet admodum curiosus sit nec ossiculis inter-

muscularibus lateralibus musculus vibrare possit, quia undique duro cortice loricatus, eadem tamen obtinet. Coctus sub aculeis versus latera protensis (ventralibus) et pinnarum ventralium vices subeuntibus venulam coccineam oculis jucundo spectaculo offert.

Appendices pylori sunt 1°) verum pancreas, 2°) receptaculum chyli et nutrimenti tempore annonae et penuriae, in avibus forte appendices caeci etiam posteriorem usum praestant, si transmigrant, varia elongata. Scuta capitis, ossicula abdominalia robustissima nec non squamae et opercula branchialia mira elegantia natura sculpsit. Latera enim argentea squamis latitudini pisciculi longitudine respondentibus striatis ad margines crenulatis vestita et in ventre aculeis binis robustis granuloso striatis margine exteriori serrulatis, mobilibus, dorsalibus similibus, sed majoribus armata sunt. Aculei isti omnes a radice ad extremitatem membrana miniacei coloris sustentati, ventrales $\frac{3}{10}$ pollic. longi, inter quos ossiculum spiculam sagittae figura referens incipit et versus inferiora ventris extenditur. Aculei procumbentes hujus ossiculi extremitatem tantum non attingunt: pinna analis ad exortum aculeum parvum ad oras spinis asperum habet: longitudo pisciculi ab extremo rostro ad extremam caudam $2\frac{1}{3}$ latitudo $\frac{1}{2}$ poll. est. Viginti hujus generis pisculos prae oculis habui, eorumque

non nisi unus repertus est, qui $3\frac{1}{10}$ longitudine poll. $\frac{3}{5}$ latitudine aequalis fuit. In ostio Bolschaja fluvii d. 20 mensis Junii cum ad maris littora commorarer me praesente capti sunt.

Ophidium occellatum Camtschaticum. Tab. VIII. Fig. 2.

Blennius ocellatus Camtschaticus, Gunnello affinis sed apos.

Der Kamtschadalische Butterfisch ohne Bauchflossen mit vereinigter Rücken-, After- und Schwanzflosse.

Bl. anguillaeformis, sulphureo flavescens, purpureo fasciatus, pinna dorsali longissima maculis sex ocellatis nigris variegata, cauda dorsali et anali pinnis coadunata, ventralibus nullis, pectoralibus majoribus, linea in vertice transversa, inter opercula sulcatus.

M. B. r. 4. pect. r. 16. dors. 80. caud. p. r. 18. anal. p. r. 58.

Pisciculum quinque et sexpollicarem longiusculum, pinnis confluentibus anguillaeformem, compressiusculum d. 4 Augusti 1804 in portu divi Petri et Pauli Camtschatico bis vel quater accepi ac ad vivum delineavi, vid. Tab. VIII. fig. 2. sed dubius haesitavi, an ad Blennios vel ad Ophidia adnumerandus sit; denique vero pinnis dorsi anali et caudali in unicam confluentibus, ventra-

lium, absque vestigio, defectu et ipso habitu convictus, Ophidiis adnumeravi.

Ophidia auctorum corpore elongato anguillari et ensiformi, pinnarum ventralium defectu et pinna caudali pinnis ani et dorsi coadunata satis distincta et a Blenniis affinibus separanda sunt, quod in systemate ichtyologico beati *Blochii* post obitum auctoris a celeberrimo *Schneidero* edito factum est, quam ob rem pisciculum Camtschaticum ocellis in pinna dorsali sex notatum, sex vel quinque pollicarem, ventralibus pinnis destitutum, caudae pinna in dorsalem et analem continuata distinctum, Blennio Gunnello affinem, Ophidiis adnumeravi. Ophidium Chinense (*Bloch.* syst. ichtyol. p. 486. spec. 3. Pennant Brit. Zool. append. 398. t. 93.), quod mihi nondum camparare licuit, ob radiorum tantum in pinnis numerum a nostro differre videtur, sed forsan affine ore imberbi ocellis aliquot nigris iridibus albis pinnae dorsi, caudali obtusiuscula etc.

Descriptio.

Longitudo 5 interdum et 6 pollicum, forma elongata anguillaris, compressiuscula. *Caput* breve, obtusum, depressiusculum, *rictu* obliquo: *maxillae* labiatae, inferior prominens, *denticuli* in utraque minuti. *Os* oblique descendens. *Oculi* ori ac naribus approximati, minusculi, subor-

biculares, *pupilla* nigra, iride alba cincta. *Opercula branchialia* plana, laevia (in recente pisciculo) glabra, elongata angulo posteriori rotundato, sulco inter utrumque in vertice transversali ad nucham tacta. *Flabella branchiostega* quadriradiata, nuda, subtus cute coadunata. Hiatus amplissimus. *Corpus* elongatum, subanguillosum, versus caudam et caput attenuatum, in regione pinnarum pectoralium latissimum, molle, fere alepidotum (in recente pisciculo squamae nullibi apparuere), *linea laterali* paulo concava, flavum subtus sulphureum, supra in dorso fuscum, maculis et fasciis purpureis effluentibus undulatis, versus caudam frequentioribus, transversaliter variegatum.

Pinnae pectorales majores, sedecimradiatae, rotundatae, lineae lateralis ortum obtegentes. *Pinnae ventrales* nullae, nequidem earum vestigium. *Anus* capiti approximatus tertiam longitudinis partem occupat. *Pinna dorsalis* longissima, post nucham supra pinnas pectorales incipiens, totum dorsum decurrens, octogintoradiata, flavo-fusca, ocellis sex nigris iridibus sulphureis cinctis picta, cum caudali conjuncta. *Pinna analis* dimidium longitudinis dorsalis superans aeque cum caudali confluens, sulphurea, quinquagintoradiata, utraque radiis mollibus suffulta, aequali latitudine ad pinnam caudalem pergit. Pinna caudae subrhombea, lanceolata, truncata, obtusiuscula, octodecim ra-

diata. Dimensiones ex ipsa icone, naturali magnitudine delineata, elucescunt.

A celeberrimo *Pallas* in faunae Rosso - Asiaticae Tom. III, qui hujus generis pisces Blenniis adjunxit, Blennius alectorolophus, Galerita. Dolichogaster anguillaris et roseus, nec non Blennius Taenia et polyactocephalus species Camtschaticae et Curilicae descriptae sunt, quae omnes a nostro abhorrent, Gunnellus vero n°. 135 inter fucos littorales ad Chersonesum heracleoticam ab eo observatus est, Camtschatici nec ab *ipso* neque *Stellero* mentio facta. Blennius ruber *Stelleri* (Mscrpt. III. B. n°. 41.) duobus aculeis loco pinnarum pectoralium instructus, a nostro toto coelo differt.

Tab. IX. *Petromyzon marinus Camtschaticus.*

Mustela sive *Lampetra* Camtschatica, lat. (Belon Salvian etc.) Camtschadalis *Canahäisch.* Ruthenis *Minog.*

Das Kamtschadalische Meerneunauge.

P. septempollicaris, pinna dorsali posteriore a cauda non distincta sed cum pinnula caudali et cum vestigio analis confluente, labiis crassis papilloso scabris, rictu oblongo-rotundo, ordine unico dentium conicorum circulari, inferioribus majoribus basi connexis, duobus pari-

bus bimucronatis versus centrum faucium et lingua hemisphaerica arcu denticellorum coronata, papilla instructa.

Petromyzon Camtschaticus medium inter Lampetras et Petromyzontes fluviatiles occupat locum et profecto posteribus ob habitum et picturam corporis adnumerassem, nisi me praesente individium in icone (Tab. IX.) depictum in aquis marinis portus divi Petri et Pauli Camtschatici d. 30 Julii mensis 1804. captum esset. Species revera marina est, sed quoad habitum, dorsi picturam et naturalem magnitudinem Petromyzontibus fluviatilibus (den Neunaugen oder Prikken) approximata et praeterea capite praelongo subrostrato, labiis crassis, dentium ordine singulari et cauda crassiuscula truncata vix pinnata, nec non vestigio analis rubescente in eandem excurrente distincta. Notis a *Blochio* ad characterem specificum Lampetrae vel Petromyzontum marinorum stabiliendum constitutis haec species Camtschatica marina contraria est; ordine enim unico tantum in circulum dispositorum dentium instructa est et forsan probat, Petromyzontes majores et minores *marinos* et *fluviatiles* (Sc. Neunaugen) in aqua marina et fluviatili vivere, eorumque nomina specifica neutiquam definita esse. — Praeterea nec lingua nec poruli muciferi in ordines

serpentiformes digesti et in diversis speciebus diverso cursu producti nondum accurate satis observati ac definiti sunt, quam ob rem necessarium duxi, hancce novam speciem Petromyzontis paulo accuratius investigandi ac describendi. In icone (Tabulae IX. fig. 1ma) Petromyzon naturali magnitudine a latere ad vivum pictum est, in figura 2da caput ab inferiore parte, ore aperto, ut dentium ordo in faucibus et lingua in conspectum veniant, aucta magnitudine repraesentatum est.

Descriptio.

Corpus lubricum anguillosum nec marmoratum neque variegatum, sed supra olivaceo-fuscum in dorso capite et apicibus pinnarum nigricans, subtus coerulescens argenteo nitens, sub oculis et circa spiracula flavescens, versus oris terminalis labia et post anum rubescens, caeterum teres, muco obductum, porulosum, versus collum attenuatum, crassius versus thoracem et dorsum ante pinnam dorsalem anteriorem. Caput oblongum subrostratum, ut in argenteo Tranquebariensi (*Bloch.* system. ichtyol. pag. 532. fig. 1. Tab. 102.) corporis crassitiem aequans, subtus *porulis* multis mucifluis sensim decrescentibus ordine lineari et serpentino utrinque dispositis (vid. Tab. X. fig. 2. *bb.*) pertusum, *fistula* in vertice (*a*) inter oculos laterales (Tab. IX.

fig. 1. *a*.). *Os* terminale subovatum (fig. 2.), ad sugendum idoneum, labiis crassis, papillis minutissimis (*c. d d.* fig. 2.), mucronulatis, scabris cinctum, ordine dentium flavicantium unico (*e e*), majoribus inferioribus basi connexis (*i*), cum quatuor centralibus (*g*), interdum bimucronatis (*f*) et lingua ipsa denticulata (*h*) repletum.

Dentes miniato lutei conici incurvati, intus cavi, margine basilari carnoso cincti, centrales bimucronati (*g*), ordo unicus dentium in circulum, cujus inferior arcus a majoribus dictis basi connexis clauditur, dispositorum, labio circulari approximatus, sub quo par minorum dentium supra centrale. Sub oris centro *lingua* ipsa in faucium fundo cernitur, pistilli pneumatici in adsugendo et remittendo, vices gerens, haemisphaerica arcu semilunato serrato coronata et papilla in centro instructa (*h*). Labio scopulis affixo et ore clauso, aqua marina intus suscepta, functione respirationis peracta, per fistulam (*a*) in vertice more balaenarum iterum rejicitur. *Anus* (vig. fig. 1. Tab. IX. *c*.) conico papillaris caudae approximatus, sub initio pinnae dorsalis posterioris, quartam longitudinis partem piscis occupat. *Pinna dorsi anterior* obtusangulo-rotundata versus dimidium longitudinis corporis incipit virescens, *dorsalis posterior* latior medio latissima obtuso angulo nigricante virescens. *Pinna caudalis* brevissima, truncato lanceolata e

vestigio lineari pulvinato rubescente analis ab ano ad caudam usque descendente orta et cum dorsali posteriore coadunata.

Observationes.

Praeter spiracula septem utrinque post oculos obliqua directione versus thoracem descendentia, innumerabiles adsunt poruli mucislui, quorum ope epidermis et integumenta Petromyzontis, solis in undis contractionibus, celerrimis et motu unduloso serpentino rapidiori locomotivi et progredientis, humore viscoso continuo lubricantur, quam ob rem corpus vivum semper lubricum et muco obductum, ut nulla vi in manubus retineri possit. *Porulos* istos ampliores ad verticem inter et circum oculos dispositos ad olfactus et auditus organon pertinere putavit *) *Bloch* ichtyologiae nostri aevi facile princeps. Cum vero lineis vel ordinibus continuis dispositi sint poruli hi sub oculis

*) *Bloch* Naturgeschichte der Fische Deutschlands III. Theil. pag. 36. Die 7 Luftlöcher auf jeder Seite sind ein sicherer Character für dieses Geschlecht. Der Kopf ist dünner als der Körper und inwendig mit orangefarbigen oben etwas gekrümmten und unten breiten Zähnen versehen, welche inwendig hohl und mit einem fleischigen Rande umgeben sind. Der Mund, womit sie sich ansaugen, ist oben länger als unten. Vor den Augen bemerkt man unterwärts, ingleichen über denselben *mehrere kleine runde Oeffnungen, welche ohnstreitig zum Geruch und Gehör dienen.* Die Zunge ist mit verschiedenen sägeförmigen Zähnen besetzt, hart, halbmondförmig und dem Fische beym Ansaugen und Loslassen nützlich etc.

jugulum versus descendentes, amplitudine sensim decrescentes (quod in fig. 2da *b b*. Tab. IX. demonstratum est), et ductu serpentino conveniant iterumque secedant; sub judice lis est, an superiores ampliores ad majorem muci copiam ad caput et nucham lubricandam necessariam secernant et emittant nec ne. — Verosimile enim non est, porulos paulo majores ejusdemque cum minoribus structurae nec non aeque mucifluas eadem serie continua decurrentes, aliam prorsus habere functionem ac sensim minores inferiores.

Caput supra, versus oris hiatum subrotundum, paulo longius et dilatatum, versus jugulum vero brevius et angustatum, orificium ergo inferiora versus inclinatum. Petromyzon orificium ubique adplicandi et corpora objecta adsugendi cupidus adhuc dum adhaesit atque ad vitrum sese affigit, cum corpus secundum longitudinem jam dissectum fuerit, et per plures horas vixit. Assugendi functio ope lingae et orificii oesoghagi papillaeformis quam maxime exerceri videtur, quae retrahendo vacuum spatium in faucibus, labiis corpori alieno applicatis, efficiunt, quod in cylindro vitreo aqua marina repleto, in quo Petromyzon repositus erat et ad superficiem internam vitri affictus, animadvertere mihi licuit. Papilla enim (*h*), quae in Tab. IX. fig. 2da in centro faucium hiantium profundo ad lin-

guam cernitur, orificium oesophagi contractum esse mihi videbatur corona denticellorum linguae basi coadunatorum aureo flavicantium cinctum. Dentes sunt vaginae osseae conicae ad apices incurvatae, acutae, capsulis cartilagineo carnosis ad bases insertae, neutiquam vero maxillis, ut in aliis piscibus. Respirationis organa, quae in piscibus 8 sunt branchiae, in Petromyzonte ex utriculis quatuordecim constant, super quos mambrana rubescens plicata expansa est; quae cum iis obliqua directione et cum spiraculis simul descendit. Spiracula utrinque septem in totidem utrinque utriculos ducunt, pulmonum vices gerentes, sed nulla inter se communicatione gaudentes. Orificium in quovis utriculo dissecto cernitur triplex, exterius spiraculum nempe, et duo interna, quibus aqua spiraculis hausta iterum ejicitur h. e. ad fauces transfertur vel faucibus affixis et clausis per fistulam ad verticem adducitur excretoriam.

Petromyzon Camtschaticus ano conico-papilloso cum Petromyzonte Planeri convenire videtur, sed haec species multo minor in rivulis aquae dulcis vivens corpore annulato graciliori et capite breviori nec non pinnis a nostro, qui non nisi in pectore plicis vix sensibilibus annulosis notatus est, distinguitur.

Cum mihi non contigerit, alia hujus Petromyzontis specimina, imprimis majora et ex aliis regionibus Camt-

schaticis videre, in quibus dorso variegato reperiri dicuntur specimina; ex *Stelleri* Indice Piscium Camtschaticorum (manuscripto Lit. F.) descriptionem addere liceat.

Descriptio Lampetrae (variegatae) Kanahäisch.

Caput $\frac{1}{3}$ poll. longum, fusco colore nitens, figura oris oblonga. Mandibulae dentatae et superior duobus, inferior sex dentibus lutescentibus instructa est. Oculi 1 poll. spatio ab extremo rostro distantes $\frac{1}{10}$ diametro aequant. Irides oculorum aeneae. Paulo supra oculos summum rostrum foramine parvo donatum est (h. e. fistula in vertice). Corpus rotundum anguiforme. Dorsum fusco colore ut et reliquum corpus instar squamae splendet. Pinnae dorsi duae radiis destitutae, quarum anterior $1\frac{1}{5}$ poll. longa $\frac{1}{5}$ lata lutescens, posterior ad caudam usque pertingens circa radicem lutescens caeterum nigricans $2\frac{1}{4}$ poll. longa $\frac{1}{2}$ poll. lata. Distat autem anterior dorsalis pinna ab extremo rostro $5\frac{4}{5}$ poll., posterior ab anteriori haud plus $\frac{3}{10}$ poll. Latera e viridi aeneo colore nitent, quem lineae fuscae, circa summum dorsum oriundae transversimque serpentino ductu ad ventrem ubi continguntur late distinguunt. Pinnarum branchialium loco ad utrumque latus foramina rotunda $\frac{1}{10}$ poll. diametro aequantia, paulo infra oculos incipientia (i. e. *Spiracula*) reperiuntur. Prona cor-

poris pars ab extremo rostro ad finem branchialium foraminum albet caeterum dilutescenti colore lucet. Anus 8½ poll. ab extremo rostro distat, sub quo appendix parva rubens mollis (i. e. vestigium pinnulae annalis) sita est. Cauda 1 poll. longa $\frac{2}{5}$ lata. Longitudo totius piscis ab extremo rostro ad extremam caudam 1 pedis 1½ poll. Captus in sinu Bolschaja fluvii prope ostium ejus vivusque ad me allatus d. 18. Junii 1738.

Tab. X. *Pleuronectes stellatus Pallassii* (Nov. Act. Petrop. Tom. I. Tab. IX. fig. 1. 1787. Faun. Ross. As. III. Tab. LXXXVII.

Passer Oceani orientalis et Rhombus scaber *Stelleri* Mscrpt.

Die Sternscholle (Georgi Beschr. des Russ. Reichs, 3 Thls. 7r Band, pag. 1922.).

(Besser Kamtschadalische Stachelscholle mit gestreiften Flossen.)

Pleuronectes striato pinnatus mihi (Mscrpt.).

Ruthenis *Cambala*, Curillis *Tanticù*, Itaelmenis ad bolschaja Reka *Syhgesich*.

Pleuronectes rhomboidalis, oculis sinistris, tuberculis muricatis stellatis utrinque scaber, pinnis albo nigroque alternatim striatis.

M. B. 6. rad. Pect. 8. Vent. 6. Dors. 52. A. 40. C. 16.

Singularis haec nova et in systemate ichtyologico *Blochii* nondum recepta species Pleuronectis ex sola cel. *Pallassii* egregia descriptione usque adhuc nota fuit et nondum sub numero piscium Camtschaticorum enumerata est. Specimina in ostiis rivulorum et fluviorum ex insulis Curilis in orientalem Oceanum profluentium capta accuratissimo *illo* ac indefesso faunae Rossicae scrutatori siccata allata sunt; sed jam antea Pleuronectes stellatus ab immortali *Stellero* ad Camtschatcam observatus et sub titulo passeris Oceani orientalis in manuscriptis ichtyologicis ad Academicum Imperialem Scientiarum Petropolitanam missis descriptus nec non Rhombus asper dictus fuit. Ex indefessi vero *Stelleri* scriptis ineditis eo tempore quo nec *Blochii* nec *Schneideri* curis piscium cognitio adeo aucta fuit, ac nostris temporibus et quo nec ipsius *Linnaei* ingeniosissimi nomenclatura et studium historiographicum animalium adeo excultum et promulgatum fuit, consignatis, - omnino difficillimum erat novas piscium descriptorum species distinguendi, recognoscendi et eligendi, eo magis, si iconibus non illustratae fuerint et si scrutator criticus non ipse in regionibus Camtschaticis adfuerit nec per autopsiam piscium viventium eorumque comparationem certiorem sese fecerit, et profecto fateor, me *Stelleri* descrip-

tionem piscis nostri pluries perlegisse, antequam me persuasum haberem, eandem Pleuronectem stellatum tractare, et ipse celeberrimus *Pallas* in capite descriptionis suae asserit: „in manuscriptis oculatissimi *Stelleri* ichtyologicis „nullam hujus Pleuronectis mentionem invenio neque apud „*Krascheninicofium* indicatur; unde verosimile est, circa „Camtschatcam non dari.“ Revera tamen datur in undis Camschaticis et omnia siccata et in spiritu vini conservata specimina in itinere circum globum *Krusensterniano* collecta in portu divi Petri et Pauli mihi allata sunt et ipsius *Stelleri* observationes ineditae in *Pleuronectem stellatum* institutae, quae ad calcem mearum adjectae sunt, in speciminibus Camtschaticis institutae videntur.

Descriptio.

Magnitudo piscis pedalis interdum et vix et ultra: *figura* rhomboibalis fere platessae, capite tamen caudaque exporrectis. *Corpus* planum, ovatum, bicolor, superficie altera fusca altera alba, utraque vero hispida et spinulis in formam stellularum congestis scaberrima. *Oculi* ovati a latere sinistro fusco, *os*, ut in congeneribus, oblique scissum, *maxilla inferiore* longiore, utraque dentibus lineari acutiusculis, antice majoribus, versus angulos minimis, pectinata.

Labia retractilia praesertim maxillae inferioris *). *Caput* cuneiforme cum operculis branchialibus osseum et simul, ac omnes osseae regiones, spinulis stellatis scabrum, ab interstitio orbitarum *jugo* retrorsum arcuato subcarinatum.. *Carina* ipsa in dissecto pisce plano sub initio pinnae dorsalis maximam crassitiem $1\frac{1}{2}$ pollic. capacem attingens, transit inde in lineam lateralem longissimam. *Orbitae* ovatae et radices osseae pinnarum tuberculis stellatis scatent. Margines corporis confertissime spinulis radiatis in ordines dispositis obsiti, in superficie inferiori albida tamen rarioribus et decoloribus. Ad capitis carinam in superficie fusca tubercula cacervata; in albida ad carinam obtusiorem prope pinnam dorsalem, minora, albida. In medio operculi branchialis et in superficie musculorum intercostalium tubercula nulla sunt. *Linea lateralis* ipsa etiam inermis, ex articulis 50 linearibus interceptis composita, et quasi concatenata est sed a jugo intraorbitali capitis cum tuberculis muricatis coacervatis in arcum supra operculum ascendentibus incipit et lineari serie spinularum stellatarum utrinque ad caudam usque concomitatur,

---

*) Pleuronectes stellatus minor simul cum Hexagrammo *Stelleri* (Labrace hexagrammo *Pallassii*) in una eademque tabula aenea repraesentatus labiis porrectis dipictus est in collectioni iconum historiam intineris nautici *Krusensterniani* feliciter circum globum peracti illustantium (Atlass zu Krusensterns Reise um die Welt in den Jahren 1803 bis 1806.).

quam ob rem bilineata a celeberrimo *Pallassio* dicta est, plerumque per ipsam caudae pinnam tendit. *Spinulae stellatae* ad radices pinnae dorsalis et analis nec non ad lineam lateralem utrinque in series vel ordines dispositae ad caudam, ubi coarctatae concurrunt, minores evadunt. *Opercula* branchiarum postice angulo acuta, sub quo *membrana branchiostega* angustissima radiis 4 longissimis planis descendit. Corpus ipsum ovatum quidem, sed pinnarum lateralium accessu, dorsalis nempe et analis medio latioribus in formam rhomboidalem dilatatur.

Pinna dorsi omnium longissima, radiis 52 composita, fasciis 6 nigris semipollice latioribus striata. *Pinna analis* paulo brevior pone medium aeque dilatata, 42 radiis suffulta fasciis quatuor nigris interstincta. *Anus* in regione pectorali inter pinnas ventris et ani in medio. Pinnarum omnium latissima *caudae pinna* est, fasciae ejusdem nigrae, quarum directio, ut in reliquis omnibus, eadem cum radiis est, bipollicaris longitudinis, 16 radiis extremo bifurcatis suffulta. *Pinnae pectorales* 8 radiis compositae, minores. *Ventrales* sex radiis suffultae, minimae.

Nonsolum scabrities corporis a tuberculis *aculeato-stellatis*, utramque superficiem occupantibus, orta, sed etiam pinnae tres majores nigrofasciatae, *potentiores notae* sunt, quibus Pleuronectes noster ab omnibus reliquis congeneri-

bus specicbus distingui valet. Maximum individuum die 24 Julii mensis 1804. in portu divi Petri et Pauli allatum ab extremo rostro ad extremam caudam 14 pollicum longitudinem et 9 poll. latitudinem attingebat, solum corpus vero remotis pinnis $11\frac{1}{4}$ poll. longum $5\frac{3}{4}$ poll. latum. Crassities corporis plano depressi 1 pollicis, excepta carina ad nucham, ubi crassius. Sequentibus diebus minora specimina colore lucidiore et numero minori aculeorum variantia allata sunt oculis olivaceo coeruleis annulo aureo cinctis distincta, quibus omnibus *aculeus* antrorsum versus *prope anum* positus fuit, qui et a *Stellero* observatus est. Linea lateralis concatenata, per ipsam caudae pinnam continuata, stellulis aculeatis utrinque in lineam dispositis parallelo cursu concomitata usque ad pinnae ortum. Margines pinnarum et osseae regiones reliquae in superficie dextra albida stellulis aculeatis sed decoloribus hispidulae, fasciae pinnarum nigrae sinistri lateris fusci in dextro albido in pinnis subdiaphanis colore cinereo transparebant. Cauda longissima, in quibusdam recta, in aliis truncata imo rotundata, semper vero albo nigroque alternatim striata. Sequenti anno 1805 in oceano Segaliensi vel Sachalinensi versus ostium Amur fluvii mense Augusto eandem Pleuronectis speciem repertam legimus. Plura specimina tosta et ad mensam cibis oppositam oblata sunt, ejusdem sapo-

ris ac in Camtschaticis dijudicata, sed et in his discrimen, (majore nempe olivacea et minora brunneo rufa fuere) forsan ab aetate vel sexu derivandum. In majoribus bases pinnarum, exceptis fasciis nigris, miniaceo rubrae vel aureo-flavae et aculeis stellatis in lineam dispositis lituratae, radii pinnarum ipsi ad bases hispiduli, quod in minoribus non fuit.

Nova et nondum in republica naturae scrutatorum cognita objecta Camtschatica omni cum veritate in simulacris ad vivum pictis *Vobiscum* communicandi equidem studiosissimus, omnia quidem mihi oblata citissime collegi et consignavi; sed si spatium septem annorum cum totidem hebdomatum spatio, quo mihi ibidem commorari licuit, comparare velitis, mox videbitis, *Stellerum* oculatissimum et indefessum per tot annorum seriem plura perscrutasse, toties repetiisse et accuratius perlustrasse, ac mihi ac ullo successorum vel peregrinatorum Camtschaticorum umquam licebit. Anatomen Pleuronectis nostri non exposui, quoniam propter ingentem objectorum annotabilium et arripiendorum copiam impeditus non potui, quin ullum individuum cultro anatomico subjicerem, sed ex schedis *Stellerianis* ineditis, propriis auctoris verbis Vobiscum communicandis, nunc ea compleri possunt, quae ex disquisitionibus anatomicis beati viri prodiere.

Dimensiones passeris oceani orientalis S t e l l e r i *(Pleuronectis stellati.)* qui Ruthenis vocatur *Cambala*, Itaelmenis ad Bolschaja Reka *Syhgĕsĭch*,

mensuratus ad scalam Anglicanam, unus ex maximis in fluvio Bolschaja captus et descriptus die 10. mensis Maji anno 1743.

	poll.	dec.
longus ab apice mandibulae inferioris ad extremam caudam .	20	8
— — — — — — ad frenum oris . .	1	
— — — — — — ad oculi dextri canthum majorem . .	1	9
— — — — — — ad oculi sinistri canthum majorem . .	1	2
— — — — — — ad valvae branch. cardinem superiorem . .	5	3
— — — — — — ad pinnae dorsalis initium .	7	6
— — — — — — ad nares supinas . .		5
— — — — — — ad nares superiores . .	1	
Oculorum intercapedo ad canthos majores . . .	1	
Intercapedo narium interiorum		8
latus ad sternum	4	2
— ad anum.	7	2
latitudo maxima per pinnas laterales extensa . . .	13	2
— — ad caudae pinnae initium	2	4
cauda extrema lata . . . . sc. extensa . . .	5	2

Cum *Stellerus* beatus in dubio fuerit, an Pleuronectes stellatus cum passere Bellonii, quadratulo Rondeletii, Platessa Ausonii, Plye Gallorum, Plaise Anglorum idem sit et in hocce dubio per differentem et dubiam Rayi et Willughbeyi (pag. 96.) descriptionem retentus fuerit, propriam ejus descriptionem respectu et comparatione cum dictis sed omnino diversis speciebus concinnavit.

Descriptio ejusdem.

Discrepat passer Oceani orientalis ab iis auctoribus discriptis sequentibus: 1mo supina facies quidem sordide olivacea est, sed in multis plane fusca, in multis olivaceus viror cum fuscedine miscetur, maculae autem rotundae miniatae plane desunt, nec pinnae eas obtinent, pinnae sordidae albae aut carneae sunt quatuor aut quinis columnis unam unciam latis fuscis aut nigris interdistinctae secundum radios exporrectis: 2do squamae nullae sunt nec vestigia squamarum, nisi Rondeletius illa ossicula rotunda sesquilineam lata, aspera, extantia, denticulata et veluti *stellata* perperam squamas vocet, ossicula autem haec indiscriminatim posita sunt. Valvas branchiales numerose occupant juxta lineam lateralem quadruplici, quino, imo seno ordine quodammodo posita cernuntur, ante caudam interstitium illud a pinnis liberum supinum fere totum occupant; oras quaquaversum ad pinnae dorsi et analis radices tam prone quam supine ita occupant, ut margines his ossiculis granulosi dicendi veniant: prone et juxta lineam in duabus seriebus locantur pauciores, solitariae, indiscriminatae, minores partim in valva branchiali, quam in lateribus cernuntur. 3^tio^ tubercula illa ossea in valva branchiali post oculos nulla adsunt, nisi eadem haec ossicula intelligat, quae vero magnitudine tantum inter se non discrepant, ut

majus, maximum et minus cognosci possit 4to Asperitates in circumferentia corporis ad radices pinnarum in rostro adsunt, quae in Rondeletiano desunt. 5to Linea lateralis, praeter morem horum piscium, sub ipso oculi cantho majori incipit retro oculum, ut 4 Ebraeorum sursum flectitur et recto tramite ad nucham tendit, a nucha sensim versus dorsi pinnam arcuata tendit et ab hinc recta ad mediam caudam pergit. Cum vero haec linea latera dividat in dextrum et sinistrum et piscis mihi oppositus in ventre jaceat capite ad me converso; dorsum ad sinistrum mihi situm erit in pisce naturaliter pars dextra; venter autem ad dextrum mihi situs, erit naturaliter piscis sinistra; adeoque oculi et nares linea lateralis a sinistro latere seclusi in dextro siti sunt ad sinistram oris. Oculus autem unus altero est altior, in interstitio oculorum ante oculos nares sinistrae sitae sunt duplices, unum foramen alteri vix non ad perpendiculum subjacet, superius foramen apertum ovale est, inferius tubulosum, alterum par narium pinnae dorsi contiguum sinistro altius et vix non in prona parte, horum superius foramen ovale apertum altero duplo majus, alterum vero pariter tubulosum. Foramen oculorum ovale, oculi pariter ovales. Iris fusca in fuscedine aurea, pupillam autem circellus capillaris rutilans, pupilla non exacte sphaerica, labia externa crassa cutanea: ap-

pendices frenales aperto ore extrema labia non attingunt. Mandibula inferior sursum adducitur. Os apertum fere ovale. Linea lateralis velut catenula quaedam ex duplicatis commatibus conflata. Valva branchialis e tribus ordinibus lamellarum: 1^{mus} *ordo* una lamella est extremis oris segmentum circuli describens, 2^{dus} *ordo* e tribus lamellis conflatur, 3^{tius} *ordo* e sex nervis utrinque cute vestitis obducitur. Valva haec imbricata interno margine introflectitur. Branchiae utrinque quaternae singulae duplici carnosarum fistularum serie et intus unica brevium aristarum albarum instruuntur. Aristae duarum anteriorum breves ad exortum crassae ad exteriores ordinum margines positae. Pinnarum septem sunt, 1^{mum} par pectoralium, una supinae, altera pronae partis, harum quaevis 9 radiis constat, quorum secundus reliquis longior, 2^{dum} par ventrale, harum quaevis sex radiis constat, quorum quartus reliquis longior. Pinna dorsi 58 radiis simplicibus constat versus 29 sensim longiores et abhinc versus caudam breviores, illa oritur ad oculos et 2 pollices a cauda deficit. Pinna analis 44 radiis simplicibus constat et ante anum aculeus passeribus proprius versus os spectans deprehenditur. Caudae pinna resima sola radiis ramosis fulcitur, apices omnium radiorum ultra membranas conjungentes eminent. Valva branchialis imbricata sterni interiori parti adhaeret, apex sterni li-

ber est. Pronus totus albus est et musculi undulati transparent.

Partium internarum descriptio.

Cor pericardio quodam obvolvitur et statim branchiis adjacet, pericardium ultra hoc versus os est interior tunica concham branchialem obvestiens, altera vero versus ventrem est diaphragma a pleura ortum, cor ipsum mole exiguum, basis cordis bifida, quodammodo quoad formam capsulam bursae pastoris refert, apici sursum converso truncus aortae adhaeret. Pleura alba et punctulis nigris adspersa. Hepar valde verminosum rubicundum erat indivisum infima parte latum, circumscriptione rotundum, versus superiora in angustius collum producitur, quod ventriculo superinjacet et ramum venae et arteriae per diaphragma a corde et branchiis accipit et mediantibus his ad diaphragma suspenditur, inferius hepar cum mesenterio per venas conjungitur. Ventriculus satis firmus et capax $\frac{1}{2}$ pollicem a reflexione versus sinistrum intestino duodeno inseritur, quod ad insertionem alatum ac duas alas sursum versus ventriculum emittit. Intestina omnia crassa ac valde capacia sunt, tenuia tamen a proprie crassis quodammodo distinguuntur, omnia mesenterio duplici membrana constante annectuntur ac multis venis, quadrupedum more, connexa ac

in tres spiras seu convoluta locantur. Lien brunneum, nucis avellanae magnitudine et forma, per vasa brevia ventriculo annectitur; vesicula fellis ampla iis tanta mole subtus nodulo instar pisi praefinita ductus cistici valde conspicua. Ductus choledochus una cum ductu pancreatico intestinum intrat sub ipsis illis alis seu auriculis intestini, ubi pyloro intestinum inseritur. Intestina a gula ad anum 42 digitos longa, ventriculus validus, intus multis plicis tortuosis rugosus, duodenum chylo refertum erat, reliqua crassa conchyliis, musculorum et mytilorum testis, ut mirum sit, quomodo in os ingerere possit et quomodo fiat, ut intestina non laedant. Concoquuntur autem testae hae penitus et veluti in chylum flavicantem resolvuntur. Ventriculus ad intestini insertionem valva clauditur, ne cibi in ventriculum regurgitent. Lactes in hoc mare duplices erant et infra anum vix non ad caudam usque exporrigebantur et in duas cavitates reponebantur seorsim, scilicet intra spinas infimi ventris, harum una sub cute incumbebat spinis, alter lobus sub ipsis reconditus erat, lactes membrana valida inducebantur, quae intus vesiculosa carnea, albente materia seminali referta erant. Vesica urinaria satis ampla. Renes in spina ad lineam reconditi brunnei forma lunae falcatae, ex his ureter unus ad vesicam descendit.

Piscis hic toto anno ad ostia fluminum et sinus ac recessus quietiores maris capitur, copiosior tamen Majo et Junio, flumina non ascendit, hyeme sub arena, qua se totum obruit, vivit. Maximi capiuntur ad *Cambalina* fluviolum 30 stadia a promontorio Lopatca. Piscis satis vivax est et ex aquis extractus per 8 — 10 horas in libero aëre vivit. Hic locorum nihil prorsus aestimatur. Passeres saepe copiose capiuntur sed cum indignatione e retibus in litus ejiciuntur, ubi saepe integris catervis jacent.

Ex indice piscium Camtschaticorum (Mscrpt. Lit F. n°. 2.) beati viri, cujus annotationes nuperrime perlustrabam, varietatem Pleuronectis nostri, quam equidem vidisse me recordor, recognovi, majorem nempe *corpore supra intense coerulescenti maculis nigricantibus interdistincto*, cujus mentionem faciam. *Stelleri* individuum $8\frac{3}{5}$ pollicum longum prope ostium Bolschaja fluvii captum erat, meum unius pedis $1\frac{3}{4}$ pollic. longum $6\frac{4}{5}$ poll. latum fuit et certiorem me fecerunt incolae pisces ejusdem speciei $1\frac{1}{2}$ pedis et longiores reperiri sed semper in fundo maris. Fluvios numquam petit, quia dulces aquas non patitur. Natat in dextrum latus projectus, obliqua interdum directione.

Tab. XI. et XII. *Cottus hemilepidotus*, species squamis scaberrima charactere generico prorsus non congrua.

Cottus scorpius Oceani orientalis. Ruthenis *Buik* bos. Camtschadalis *Jakho* dictus.

Myoxocephalus cornutus *Stelleri* (Mscrpt. n°. 30.)

Cottus Trachurus *Pallassii* (Faun. Ross. III. n°. 109. Tab. XXV.)

Georgi Beschr. des Russ. Reichs, 3 Theils 7r Band, pag. 1919. Cottus Scorpius, Ruthenis *Ramscha*.

C. capite spinoso maximo, maxilla superiore longiore cirrhata, corpore squamarum areolis longitudinalibus quatuor exasperato, linea laterali tuberculata.

Membr. branch. rad. 8. pect. 16. dors. 28. ventr. 3. anal. 14. caud. 12.

Piscium genus Cottus nostris temporibus ichtyologorum recentiorum cura varie divisum est. Primum Platycephali a Cottis separati et in novum genus redacti sunt, deinde etiam polygoni cataphracti, qui habitu gracili et corpore quadrangulato, hexangulato et octangulato, loricato gaudent et transitum fere a Cottis ad Sygnathos faciunt, et quorum Monographiam novis speciebus auctam proxime Vobiscum communicabo ab eodem separati et in *Blochii* systemate ichtyologico ad novum genus Agonorum formandum collecti sunt. A

Pallassio celeberrimo pisces ejusdem notae et formae et in omnibus fere Agonis *Blochii* similes sub nomine generico *Phalangistes* *) stabiliti sunt. Sed in iis speciebus ipsis, qui adhuc sub genere Cottus restant v. g. Scorpii, Scorpioidis *Fabricii*, Scabri (*Gmel. Lin.*) bicornis, quadricornis in diversis Asiae et Americae maribus quam maxime et mirum in modum variantibus tam abnormes et limina ipsa generica excedentibus formationibus notatae reperiuntur, ut nec generi respondentes, neque minus indicatis speciebus prorsus subnumerandae sint. Huc v. c. referendi sunt sequentes pisces: Cottus villosus **), Scorpius ***) et Scor-

---

*) Phalangistes *Pallas* faun. Ross. III. Mnscrpt. n°. 92. tab. XVIII. Phalangistes Japonicus est idem piscis, quem scrutator indefessus faunae Rossicae princeps jam in spiciligiis Zoologicis VII. pag. 30. tab. V. descripsit et Cottum Japonicum appellavit, et cujus affinem postea d. 30 Julii mens. 1805. in intinere *Krusensterniano* ex Oceani Sachalinensis sinu patientiae prope insulam Sachalin accepi et Agonum stegophthalmum appellavi. Ad hoc *Pallassii* novum genus Phalangistarum pertinet etiam *Cottus Stelleri* in systemate ichtyologico *Blochii* pag. 63 ex Catalogo Musei Petropolitani allegatus, quondam ad Cottos cataphractos, nunc ad Agonos *Blochii* allatus, Ruthenis *Lisitza*, vulpecula dictus.

**) Cottus cute molli linguae vitulinae instar villosa vestitus, venenatus *Stelleri* (observat. ichtyol. Mscrpt.). Eandem speciem nonsolum ad Camtschatcam vidi sed etiam in portu Nangasaky Japonico ubi ad vivum delineavi piscem et Scorpaenam villosam appellavi, quem alia occasione communicabo.

***) Cornubiensibus *Father Lasher*, Belgis *Bothoest*, Suecis *Rotsimpa*, *Sk[illegible]b-ba Skjål y[illegible]a*, Ruthenis *Buik* bos, Itaelmenis *Jakkå* dictus, Scorpius marinus. Scorpaenae Bellonii similis Aldrovand p. 201. Willughby p. 138. Raji Synops. pisc. pag. 145. n°. 12. Edwards Glean. tab. 284.

pioides *Fabric.* polyacanthocephalus *), trachurus **) *Pallassii* et diceraus ***) qui omnes in itinere nautico *Krusensterniano* circum globum feliciter peracto ad vivum delineati et descripti sunt. Ex hisce descriptionibus et iconibus patebit, an veri sint Cotti nec ne. Duce *Linnaeo*, qui *corpus alepidotum* ad stabiliendum characterem generis Cotti substravit, pisces quorum corpus areolis longitudinalibus *squamarum* et quidem *scaberrimarum* ab operculo branchiali ad caudam usque exasperatus est, nullo modo Cottis adnumerari possunt, et si caeterum adeo habitus piscibus hujus generis respondeat. Interea aliorum Neotericorum experientia, qui novis generibus stabilitis historiam naturalem neutiquam auxerunt nec illustrarunt, sed potius obscurarunt, edoctus, nova genera, nisi extrema necessitate coactus, creare nolo, sed viris conspectu amplissimo animalium experientissimis et autopsia acutissimis, celeberrimo *Pallassio* et *Schneidero* genera committenda trado. Licet nunc Cottus meus hemilepidotus ob squamarum copiam et scabritiem non ad genus Cottus pertineat, interea tamen usque dum alii novum genus illi crearint, sub hoc nomine

---

*) Cottus *alepidotus* capite polyacantho linea laterali tuberculata *Steller.*

**) Cottus *Hickejak* (Aleutis) barbulis duabus brevibus sub mento *Steller.* obs.

***) Cottus diceraus. *Pallas* in nov. Act. Petrop. Tom. I. pag. 354. tab. 10. fig. 7. Synanceja cervus mihi.

tradam. Simillimo modo Cottus diceraus *Pallassii* vel Cottus capite diacantho, aculeis rectis biuncialibus serratis *Stelleri*, qui in *Blochii* systemate ichtyologico nondum susceptus, sed ad calcem generis speciebus dubiis nondum satis definitis adscriptus est, Scorpaenis *Linnaeo* duce, *Synancejis Blochio* duce subnumerandus erit, quod habitus et notae omnes in sequenti descriptione enumerandae suadent.

Complures, ut ita dicam, Scorpii species variae magnitudinis et variationis, omnes vero hemilepidotas hoc est areolis squamarum longitudinalibus exasperatas in Oceano Orientali-Ochotense et Sachalinense, nec non in ipso sinu *Romantzovii* Japonico ad *Matmaï* nautae nostri caeperunt. Maximus omnium fuit Cottus mucosus Matmaïcensis vel macrocephalus ad littora Japonica insulae Matmaï repertus cute admodum molli laxa et lubrica vestitus, variis coloribus egregie pictus et muco copiosissimo obductus, ita, ut in vivo pisce areolae squamarum longitudinales scabrae vix percipiendae fuerint. Linea lateralis ejusdem admodum prominens tuberculis. Piscis hic in collectione iconum historiam itineris nautici *Krusensterniani* illustrantium *) quadruplo minor simul cum Agono vel Phalan-

*) Атласъ къ путешествію во кругъ света Капитана *Крузенштерна*. Часть II. С. Петербургъ 1810.

giste stegophtalmo depictus est (Tab. 87.). Camtschaticus minor areolis latioribus squamarum serratarum exasperatus et in tabula XII^{ma} ad vivum in XI^{ma} autem ad exsiccatum piscem depictus, in figuris utriusque tabulae, prima et secunda piscis a latere nec non a prona et supina parte repraesentatus est, ne dubium ullum remaneat, unus est enim eorum, qui nonsolum in statu vitae sed etiam exsiccato disquirendi sunt, quoniam sub muco et vitali turgore permulta obvelata latent, quae postea primum, donec omnia exsiccata sint, in conspectum veniunt, quemadmodum etiam in Molluscis gelatinosis v. c. Salpa et Beroe, organa in viventibus pellucida et non conspicua post mortem, dum in spiritu vini conservantur, albescunt et delineari possunt.

Piscis coloribus hic depictus in portu divi Petri et Pauli Camtschatico cum pluribus mihi allatus est die sexto mensis Junii 1805 terties ibi commorato. Coloribus quidem omnes depicti sunt, sed proh dolor defectu scholarum iconum coloribus adumbrandarum gratia institutarum quae Lipsiae maxime florent, icones Petropoli aëri incisas, quominus omnes coloribus prototypo simillimas reddere possim, impedior.

D e s c r i p t i o.

Caput corpore multo latius ac crassius ubique cata-

phractum et tuberosum, obtuse sagittatum, (Tab. XI. fig. 2.) superius narium spinis *bb.* recurvatis et orbitis approximatis (*a*) sulco interceptis hiulcum, nucha ascendente *ee.* radiatim scabro elevatum, subtus planiusculum, anterius rostro rotundato angustatum, fig. 2. Tab. XI. posterius operculis branchialibus versus latera dilatatum. *Rictus* raninus Tab. XII. ultra oculos fere extensus. *Labia* emissilia fig. 1. membrana intermaxillari alba purpureo undulata, labio retracto plicata, annexa, *superius* fraeno Tab. XI. fig. 1. 2. *cc.* ex sulco nasali descendente affixum, prominens, inferius recipiens, utrumque intus denticulis confertis asperatum. *Area* denticulata in faucibus et pulvilli dentibus obsiti ad palatum eodem modo disposita sunt, ut in Hexagrammo *Stelleri* (Labrace *Pallassii*), in cujus icone fauces apertae adjectae sunt (vid. praecedentem meam dissertationem). *Lamina mystacea* ad utrumque fraenum oris descendens latissima, (*d*) cirrho parvulo appendiculata. Cirrhi bini parvuli sub maxilla inferiori. *Opercula* branchialia bilamellata Tab. XI. Lamina superior est processus maxillae superioris postorbitalis inferiori et posteriori lamellae superimpositus, aculeis tribus robustis armatus, superiore sursum curvato, medio longissimo versus caudam spectante robustissimo, inferiori brevissimo, retrorsum versus membranam branchiostegam directo armatus, angulis binis obtusis su-

pra flabellum branchiale prominens, superius cum lamina posteriori operculi coadunatus, ubi spina omnium longissima oritur valvam branchialem posteriorem tegens, quae in angulum acutum rotundatum posteriora versus producitur et obliqua directione parallela paulum arcuata simul cum radiis membranae branchiostegae et radice pinnae pectoralis descendit. *Orbitae* vel potius *capsulae* (*aa*) *oculorum osseae* magnae in vertice approximatae superiori margine fornicato prominentissimae intervallo canaliculato. *Oculorum* irides fulvo virescentes, magnae, radiis concentricis pictae. *Pupillae* nigrae annulo aureo cinctae. *Verticis area* laevis, pone orbitas lunata (Tab. XI. fig. 1. et 2 *ff*) et scabra (*g*) et genae radiis elevatis sub oculis ad nasales regiones productis scaberrimae. *Flabellum branchiale* sexradiatum utrinque amplissimum, (Tab. XII. fig. 1. et 2.) sub jugulo approximatum, margaritaceo albens violaceo purpureo undulatum, collaris instar strumoso turgidi jugulum ambit. *Hiatus* branchialis amplissimus ab angulo superiore et posteriore valvae oblique antrorsum versus descendens. *Corpus* a pinnis pectoralibus sensim decrescens Tab. XI. fig. 2., teretiusculum, versus caudam sensim compressiusculum, laevigatum et fasciis quatuor longitudinalibus asperioribus alternatim striatum. *Cutis* quidem laevigata sed versus latera et supra utrinque areolis vel ordinibus quatuor alternis

longitudinalibus squamarum a nucha ad caudam excurrentium exasperata est et quidem sequenti modo: (vid. Tab. XI. fig. 1. et 2.) Venter et pinna analis libera h. e. tota regio abdominalis a pinnis pectoralibus et ventralibus ad caudam usque cute laevigata obducta est, deinde et regio supra lineam lateralem utrinque longitudinalis a cauda ad valvae branchialis cardinem extensa et pone nucham arcu lunato (fig. 1. et 2. Tab. XI. *ff*.) conjuncta aeque laevigata et alepidota est; sed in supremo dorso ordines vel areolae longitudinales binae squamarum, per solam pinnae dorsalis basin separatae sed circa ejusdem ortum ad nucham arcu semicirculari unitae (Tab. XI. *gg*.) ad utrumque latus pinnae dorsalis pergentes ad caudam usque productae decurrunt. *Lineae laterales* ex aculeo superiori valvae branchialis ortae, squamoso tuberculatae tertiam et quartam areolam longitudinalem squamatam a pinnis pectoralibus ad caudam usque producunt, areolae enim utriusque lateralis versus longitudinem excurrentis marginem superiorem linea lateralis ipsa occupat et areolae igitur pone arcum lineae lateralis paulo latiores evadunt. *Corpus ergo secundum longitudinem in quatuor exasperatas et (separante pinna anali) in totidem laevigatas regiones divisum est.* Character generis novi

Squamae in exsiccato pisce examinatae a communi squamarum forma et situ imbricato abnormes, sunt enim

sparsae obovatae et obversae quasi, ab altera parte cute ad demidium insertae et accretae, altera libera solutae ciliato serratae, superficie convexa versus cutem spectantes, concava prominentes margine semicirculari ciliato scaberrimae. Situs et structura squamarum oculo armato observata magnitudine (in Tabulae XI^mae figura 3^tia) aucta depicta est. Squamae quoad insertionem quodammodo semicotyloideae, quoad ordinem per series situ obliquo digestae vel dispositae sunt. *Pinna dorsi* continua, bipartita, flavescens brunneo fuscoque variegata, maculis irregularibus vel fasciis transversalibus vel obliquis picta: portio prior octoradiata spinosa, posterior quindecimradiata, radiis neutiquam rigidis ut in anteriore sed elongatis simplicibus. *Pinnae pectorales* rotundatae, magnae, alaeformes, reflexae, macularum duplici ordine semicirculari bifasciatae, sedecimradiatae, radiis dactyloidibus e pinnae membrana prominentibus, cartilagineo-carnosis, mollibus, crassiusculis, subclavatis, rubescentibus, in ipsa pinna ad formam litterae S clavatis (vid. Tab. XII. fig. 1. et 2.). *Pinnae ventrales* triradiatae, crassiusculae, flavescentes, ligamento suspensorio quasi annexae. *Pinna annalis* flavescens, duodecimradiata, ramentosa aeque ac opposita dorsalis fasciis fuscis transversalibus variegata, extremis radiorum cirrhis flavicantibus. *Caudae pinna* magna recta vel subrotundata, flaves-

cens brunneo-fuscoque maculata vel bifasciata, radiis interrupte fuscis bifidis prominentibus ad apicem flavescentibus quatuordecimradiata.

In piscibus viventibus muco obductis ordines longitudinales corporis alternatim squamati et laevigati vix percipiuntur sed linea lateralis tantum prominet. Coloribus et maculis nec non faciis rufo bruneoque fuscis et flavicantibus imo et purpureo violaceis maxime variant, colore fusco tincti copiosissimi sunt, corpus dum flavescens supra maculis et punctis creberrimis atrofuscis variegatum et interdum olivaceo-nigricans, ad latera fasciis irregularibus diffluentibus, maculis lucidioribus interceptis transversaliter subfasciatum, subtus more ranarum fusco maculatum, ad membranam branchiostegam et interlabialem lineolis atro purpureis convergentibus et varie interruptis vermiculorum instar convolutis undulatum. Pinnae plerumque fasciis fuscis transversalibus diffluentibus et maculis lucidioribus intermixtis pictae sunt.

Longitudo piscis plerumque novem pollicum et ultra. Dimensiones ex iconibus naturali magnitudine pictis prodeuntes addere nolo, quoniam superfluum duco. Anatomica addere non possum, quoniam piscem non dissecui et iisdem temporibus objectis pluribus novis et majoris momenti examinandis occupatus fui. Sed *Stelleri* accuratio-

rem descriptionem, anatomicis dissectionibus illustratam addam.

Saepissime strepitum vel vocem grunnientem Triglae gurnardi vel Cotti grunnientis instar auribus et tactu percepi, si piscem viventem et recentem nec commorando in aëre et littoribus lassum nec debilem ex aquis sustulerim.

Praeterea etiam annotabo, ejusmodi pisces contractione et ictu improviso manus tangentis aculeis laedere, quod proprio damno tangens expersus sum.

Dimensiones piscis descripti majoris a Stellero mensurati.

	Scal. Angl.	
	poll.	dec.
Intercapedo oculorum ad canthos majores vel anteriores	1	5
ab apice labii superioris ad extremam caudam	23	
— — — ad nares exteriores ore clauso	1	5
narium intercapedo anteriorum	1	5
ab apice labii superioris ad oculi canthum majorem	2	
foramen oculorum longum	1	2
— — — latum	1	
oculorum diameter		,8
latitudo oris	5	5
altitudo oris	3	5
anterior dorsi pinna ad basin lata	3	9
posterior — — — — —	6	2
pinna pectoralis ad basin lata	3	
— — — ad extimam expansionem lata	7	5
pinna caudae extima circumscriptione lata	5	5
— — longa	3	2
latitudo capitis ad fraenum oris	4	2
— — — ad superiores valvae branchialis cardines	5	5
longitudo ab ore ad anum usque	13	4
ab ore ad secundae pinnae dorsi initium supra anum	2	5

Myoxocephalus Stelleri.

Descriptio piscis Scorpaenae Bellonii similis.

Ruthenis *Buik* i. e. bos. Itaelmenis Jakho dicti. Belgis *Bothoest*, Cornubiensibus *Father Lasher*, Suecis *Rotsimpa Skrabba* et *Skjåltryta*, Scorpio marinus vel scorpius nostras *Schonev.* *Artedi* spec. 86, *Willughby* pag. 138. Rajii Synops. pag. 145. Aldovandi pag. 201. *Stelleri* Mscrpt. n°. 30. Cottus aleopidotus capite polyacantho maxilla superiore paulo longiore etc.

Piscis hic Oceani orientalis coloribus aeque ac corporis externa structura et forma adeo variat, ut, quamvis omnem industriam adhibuerim e quamplurimis subjectis earumque differentiis accuratam descriptionem concinnare, nihilo tamen minus implicatus quaedam in dubio relinquere debeam et quidem praecipue sequentia:

1^mum^ num piscis hic, *Myoxocephalus* mihi dictus, revera distinctus sit a Myoxocephalo cornuto, num saltem varietas? 2^dum^ num Myoxocephalus tuberculosus distincta species num solum varietas sit? tuberculosum saltim pro varietate habeo, foemellas duas tuberculosas deprehendi, mares autem glabros, ut igitur haec potius *sexus nota sit* in pluribus hucdum probanda; cornutum autem pro diversa prorsus specie habeo, eo, quod solum Awatschae

occurrat, non vero ad fluvium Bolschaja, ubi tamen Myoxocephali magno numero et longe majores, quam hic locorum, quotannis capiuntur. Mas igitur et foemina capite est praegrandi, tumido ventre, maris caput convexius foemellae majus et omnimodo planum, corpus post branchias in utraque in 5 *plana* dividitur, quorum duo a summo dorso ad lineam lateralem tuberculis rotundis asperis, velut Rhombus asper (Pleuronectes stellatus. *Pallas* Nov. Act. Petrop. Tom. I. tab. IX. fig. 1. pag. 347.) et Raja Asterias obsitum habet lentis figura et magnitudine. Spatia vero haec *plana* mihi dicta non plana sunt sed modice convexa. Color dorsi supra lineam fuscus est et areis sordide albis et flavis flavoque rubentibus varius, pariter ac infra lineam generatim ranae instar marmoratus undique maculosus et varius est. Venter albus quidem, multis tamen areolis fuscis varius est post anum magis, a branchialibus pinnis ad anum usque minus. Mentum et gula ad pectorales pinnas usque minutis et pallide fuscis ac sordide albis crebrioribus et minoribus maculis varia sunt, ut venter ranarum. Pinnae dorsi, ut dorsum ipsum, maculosae sunt, pinnae branchiales autem, pinna analis et caudae plurimorum colorum mixtura varia sunt ex albo flavo fusco et rubente colore variegantur ac fasciis transversis fuscis intersecantur, quae in branchialibus pinnis subtus crebiores

et insigniores apparent. Caput quale in ranis et bufonibus, rictus pariter ut in rana, superius labium obtuse acuminatum inferiore tantillum longius et latius. Os apertum lenticulare, labium exterius in superiore maxilla emissile, appendices frenales cuneiformes, ore clauso, ultra oculos adducuntur et ne hiando vel grandiorem piscem deglutiendo exterius labium luxetur, apophysis quaedam ossea extimo labio adnata mobilis, et velut in vagina quadam, infra oculos recondita, dum os clauditur, ibidem velut tuberculum prominet, dum vero aperitur; fovea ibidem profunda oritur.

Nares minutae, geminatae, osseo sepimento ad quatuor lineas discriminatae ac fere clausae, tubulosae, tubulo narium ad lineam unam prominente.

Oculorum foramen ovale praegrande, torositatem capitis insigniter augens, oculi ipsi profundi intra arbitas haerent, grandes sunt ac cute communi seu periophtalmio quaquaversum obducuntur, quod circa oculos maculis fuscis et albis cerebrrimis marmoratum et varium. Iris oculorum gemina, exterior sordide aurea est ac quam plurimis fuscis maculis perfusa, interior rutilans, rubens, capillaris circellus est, pupilla ampla nigricans, non exacte sphaerica, sed quodammodo versus nares producta.

Intra oculos fossa est unam unciam lata a naribus incipiens et usque ad cervicem pergens. Caput hoc enorme et praegrande crassissimum est ad valvae branchialis cardines superiores; valva branchialis tribus ordinibus lamellarum conflatur: superior post oculos versus mentum sulco a posteriore dirimitur, duobus aculeis osseis validis ac pungentibus thecis inclusis ad caudam versus spectantibus horrida est, alter ordo unica pariter lamella constahs, similibusque ejusmodi duobus aculeis armatur et, productione quadam auriculam humanam referente, branchias ad cardines superiores claudit. Lamellarum imbricatarum numero in quovis latere 6 sunt. Valva branchialis sternum veluti amiculum ambit. Os intus album. Lingua brevis crassa obtuse acuminata edentula. Labia tam superiora quam inferiora singula duobus ossibus denticulatis limae instar aspera sunt, summo palato, statim post labia, area denticellis minutissimis aspera inest. Imo palato prope oesophagum pulvilli duo asperi denticulati rotundi insunt sex septemve lineas longi, his subjacent ad perpendiculum duo alii simillimi in mento retinendis et gulae admovendis piscibus, qui iisdem comminuendis aptissimi sunt. Branchiae quaternae pallide rubentes, intus utrimque tam ad externum quam internum latus pulvillis lenticularibus osseis limae instar asperis obsitae, valvae bran-

chiali ordo unus branchiarum succenturiatarum inest. Linea lateralis a supremo valvae branchialis cardine oritur et recta utrimque ad caudam tendit, summo tamen dorso vicinior, quam imo ventri. Linea e commatibus contiguis cartilagineis conflatur. Pinnarum octo sunt, duae in medio dorso, anterior radiis octo acuminatis osseis conflatur, quorum quartus reliquis longior; altera, quae priori *intercedente membrana* $1\frac{1}{2}$ unciam longa *jungitur*, 16 constat radiis simplicibus, quorum octavus reliquis longior. A sexto reliqui nervi, ad intimum et ultimum usque, crassitie augentur, nec radii, quin potius clavi videntur. Pinnae ventrales ad thoracem locatae quaevis tribus constat radiis, inter quos extimus crassior intimus longior reliquis. Pinna analis 13 constat radiis simplicibus crassiusculis. Pinna caudae 12 conflatur radiis ramosis, crassis, expansa non nihil rotundata, complicata, resima est. Radii omnium pinnarum supra membranas conjungentes eminent: ita et membranae conjungentes maxime omnium colorum varietate ludunt. Anus valde prominens tantillum caudae propior quam ori, ex illo vesica urinaria collo suo dependet. (Conf. Tab. XIII. fig. 1. *m.*)

Cutis reliquum laxe admodum corpori adhaeret, glabra est, in capite vero valde tuberosa et porosa. Quos clarissimus Rajus aculeos vocat ante oculos, ego potius

eminentias osseas voco, quales revera sunt, non vero aculei, quales in valva branchiali cernuntur.

Anatomica.

Hepar trilobum, cystis fellea nullibi conspicua, sed ductus biliares plures. Ventriculus (in pedali pisce) mole juglandis, continens parvum Rhombum (Pleuronectis stellati pullum) cancellos et fragmentum Madreporae. Appendices pylori 5 longiusculae. Intestina tantum semel reflexa, chymo candido repleta. Renes antica extremitate bifurci, ovaria duo, ovis minutissimis referta.

Tab. XIII. *Synanceja Cervus.*

(Conf. Charact. gener. in systemate ichtyologico *Blochii* a *Schneidero* edito.

Scorpaena secundum *Linnaeum.*

Cottus diceraus Pallassii Nov. Act. Petrop. Vol. I. 1783. pag. 354. Tab. X. fig. 7. ejusdemque. faun. Ross. III. tab. XXVI. n°. 110.

Cottus capite diacantho aculeis rectis biuncialibus serratis *Steller.* observat. ichtyol. Mscrpt.

Die Frazzengroppe (Georgi Beschr. des Russ. Reichs, 3 Thls. 7r Band, pag. 1919.)

Ruthenis *Buik* vel *Buitschok* nec non *Rogatka.*

Curilis *Kcheiljucha* i. e. facies deformis vel monstrosa (die Frazze, der Frazzenfisch oder Seehirsch) apte et optime dictus.

S. macrocephala, capite cavernoso-tuberculoso utrinque cornuto spina hamata, linea laterali tuberculis muricatis composita.

Membr. branchiost. rad. 6. Dors. 7 — 15. Pect. 17. Anal. 10. Vent. 3. Caud. 12.

Pisciculus hic macrocephalus jam dudum a celeberrimo *Pallassio* egregie descriptus, Cottis adnumeratus, a systematicis nondum receptus nec ad vivum cum veritatis specie usque adhuc depictus, capite maximo, horrido, tuberculoso, cornubus rerratis vel hamatis utrinque cornuto, facie monstrosa horribili distinctus, non Cottus sed Scorpaena *Linnaei* vel *Blochio* duce Synanceja est. Celeberrimus enim *Pallas* ipse ait: „Scorpaenarum genus in universum ca-„pitis monstrositate eminet: imo haec *ipsa capitis hiulca* „*difformitas* quam maximo gradu monstrat Scorpaena hor-„rida *Linnaei* a *Gronovio* graphice adumbrata, *optimum* „*hujus generis characterem praebet.*" Vix enim non semper, maxime in piscibus habitum naturalem sequi praestat, quam in solitariis characteribus haerere, quandocunque suboriatur dubium de genere cujusdam speciei naturali etc. C. Spicilegia Zoolog. fasc. VII. pag. 26. t. IV.

Patria est Oceanus orientalis, ubi ad littora Camtschatica et Curilica collectus fuit. Celeberrimus *Pallas* piscem siccatum ex insulis Curilis accepit. Habitum neutiquam Cotti scorpii habet referente *Georgio* errante, sed plane singularem et horribilem, quod ex iconibus meis comprobatur et demonstratur. Longitudo piscis a 3 poll. ad 9 accrescit. Coloribus egregie exornatus, scilicet e brunneo flavo olivaceo et violaceo variegatus et flavo alboque marmoratus est, nec non tuberculis et aculeis, sed etiam cornubus binis spinosis vel ramoso uncinatis (veluti in Cervo) fortiter armatus, quam ob causam eundem lubentius cervum quam bovem appellavi. Curilis nomen *Kcheiljucha* optimum et expressivum est, facie enim fabulosa et monstrosa hic piscis distingitur. Quod a priore Cotto hemilepidoto nempe dixi, valet etiam ab eo. Cavendum enim est, ne incaute piscem recentem ex aquis nudis manibus apprehendas quoniam cornuum spinosissimorum ictu et convulsione improvisa manus tangentis laedere solet. Caeterum piscis in portu divi Petri et Pauli ad Camtschatcam captus non comeditur sed canibus projicitur et in pabulum hyemale colligitur.

D e s c r i p t i o.

Magnitudo naturalis plerumque quinque vel sexpollicaris, latitudo inter cornua tripollicaris; inter pinnas pecto-

rales expansas mensurata, quadripollicaris. *Caput* maximum, polygonum, difforme, hiulcum, obtuse sagittatum, orbitarum capsulis osseis unitis praecipitibus cataphractum, spinis occipitalibus et maxillaribus nec non cornubus interiora versus hamatis prominentissimis armatum, ore rotundato, rictu ranino, maxillis subaequalibus labiatis, superiore labio membranae intermaxillari pictae annexo, emissile, utraque maxilla dentibus acerosis minutissimis asperata, cirrhis minutis albis appendiculata. *Cirrhi* tres ad oris angulos, bini nempe laminae mystaceae utrinque affixi tertius sub ipsa maxilla inferiore, bini ad latera marium (Conf. Tab. XIII. fig. 1. *hh. hh.*). Lamina supramaxillaris deorsum prominet (*d.* et *g.*) processibus binis divergentibus applanatis. *Aculei nasales* (*ii*) recurvati ad basin amplissimi, interdum et tuberculo cutaneo ex sulco nasali ascendente separati, canalis intraorbitalis basin occupant.

Maxilla superior anteriora versus sulco nasali et frontali nec non aculeis nasalibus ac orbitarum fornice didymo prominentissimo, ascendens versus latera veluti in alam utrinque tridentatam dilatatur et vespertilionem quasi volantem alis expansis imitari videtur (vid. fig. 2dam et 3am Tab. XIII.). Ala utrinque connectitur *superius* cum margine orbitarum exteriori in acutum angulum granuloso sca-

brum producto versus cornua, *lateraliter* cum basi cornuum ipsa, *posterius* cum arcu temporali scaberrimo ad basin cornuum producto et cum operculis branchialibus, *anterius* cum lamina utraque mystacea ad frenum oris et cum labio, mediante membrana labiali, *inferius* cum labio inferiori et membrana branchiostega. *Orbitae* in medio vertice approximatae fornice communi didymo, per medium sulcum frontalem vel intraorbitalem, longitudinaliter excavato prominentisimae, posteriora versus iterum descendunt ad nucham inter cristas duas seu carinas parallellas depressam. *Carina* utraque in spinam occipitalem terminatur et *nucha* ipsa est continuatio sulci frontalis vel intra orbitalis. *Oculi* magni capsulis vel thecis orbitalibus osseis inclusi, *irides* virescentes annulo aureo pupillas cingentes fulvo fuscoque radiis concentricis radiatae. *Opercula* branchialia anguloso-dilatata polygona triplici superficie prostant. Superficies *anterior* patentissima, obliqua, alam dictam utramque occupat spinis tribus longissimis divergentibus applanatis dentatam (vid. fig. 1. *f. g. d.*) et binis brevioribus flabello branchiali impositis (*ee*) armatam, *superior* superficies a margine posteriori orbitae ad basin cornuum horizontaliter extensa angulo acuto triangularis, minor reliquis et arcu temporali postice crenulato terminata, superficies denique *posterior* maxima, arcuato dentata, ab utraque carina et spina occi-

pitali posteriora et inferiora versus descendens ad radicem pinnarum pectoralium usque, cum ipso flabello branchiali spinis tribus prominentibus coadunata, quarum secunda vel media quae spinae occipitali proxima est lineae lateralis ortum denotat et sequens quae longissima est et valvae branchialis cardinem posteriorem claudit, infima denique sub ipso cornu vel sub spina hamata descendens pinnam pectoralem spina duplici ex radio ab arcu temporali descendente orta spectat.

Spina hamata (*a*) ipsa vel *cornu* utrumque simul cum aculeo laterali (*c. d.*) oritur extimo angulo operculi utriusque anterioris ad latera capitis extrema. Operculum anterius enim versus latera dilatatum et aculeatum permultum distat a posteriore et inferiore, ideoque exteriora versus ossiculo aculeato fulcitur quod cum arcu maxillari et temporali osseo ad formandam robustam spinae hamatae basin jungitur, aculeus in extimo oporculi angulo (*c. d.*) extrorsum spectat, cornua (*a*) vero retrorsum diriguntur subulata, uncis sex in interiore latere, tribus minoribus in exteriore ad apicem fere hamata, striis ceterum granulosis scaberrima (vid. fig. 3. 4. et 5. Tab. XIII) *Membrana branchiostega* laxa, ampla, turgida, isthmo adnata, radiis 6 distantibus instructa. *Pinnae pectorales* latissimae semiorbiculato-

alaeformes radiis mollibus, crassiusculis, subclavatis, prominentibus 17 serratae, maculis irregularibus fusco trifasciatae. *Ventrales* fere jugulares intermediae bi et triradiatae angustissimae, radio extimo longissimo. *Pinnae dorsales* ambo radiis flexilibus, anterior 7, posterior 15 tenuissimis, subramentosis radiatae maculis fuscis variegatae. *Pinna analis*, dorsali posteriori fere opposita maculis seriatis secundum radios dispositis punctata, radiis 10 — 12 prominentibus suffulta. *Cauda* magna, aequalis, radiis 12 bifidis, pinna radiata fusco bifasciata extremo interdum rotundata, radiis bifurcatis prominulis.

Corpus statim a capite attenuatum, teretiusculum versus caudam compressum, alepidotum. *Linea lateralis* ex tuberculis conicis circiter 30 in seriem arcuatam digestis composita, dorso vicina et inter pinnam anteriorem et posteriorem dorsi magis appropinquata. Tubercula muricata, ossea, scabra anterius majora vere conica posterius minora et obliqua mucronata et bimucronata, mucrones recurvati, et bases radiis concentricis granuloso striatae, ut hoc in figura 6[ta] Tab. XIII. microscopio observatum et magnitudine aucta depictum est: α) tuberculum ex sinu branchiali, β) aliud ex medio, γ) tertium ex ultimis mino-

ribus versus caudam subimbricatis, bimucronatis. *Anus* caudae vicinior, ex eodem interdum vesicae collum propendet (vid. fig. 1. *m.* Tab. XIII.). Color pulchre varius virescente et rubescente flavus, in dorso olivaceus maculis albo flavicantibus intermixtis pictus, ventre pectoreque - albo. Pinnae mox fasciatae mox maculatae, color caeterum in variis varius.



DESCRIPTION D'UN TETRAS,

OU D'UNE ESPÈCE PARTICULIÈRE D'OISEAU TRÈS PEU CONNUE, QUI SE TROUVE AUX ENVIRONS DE St. PETERSBOURG.

PAR

G. H. LANGSDORFF.

Présenté à la Conférence le 24 Octobre 1810.

Le nombre des oiseaux connus, qui se trouvent dans les environs de St. Petersbourg est bien considérable; celui des objets rarement observés, ou tout à fait in connus aux naturalistes ne l'est pas moins.

Dans le grand nombre d'oiseaux rares, qui j'ai vus depuis le tems, que j'ai commencé à m'occuper de cette partie de l'histoire naturelle il y a plusieurs qu'on connoit à peine.

Entre autres j'ai eu l'occasion d'observer une espèce
Tab. XIV. de Tetras, dont nous n'avons jusqu'àprésent que des descriptions incompletes et des connoissances vagues.

Plusieurs savants *) ont nommé l'oiseau, dont il est question, *Tetrao Tetrix hybridus*, croyant que c'étoit un batard de la femelle du grand Tetras (Tetrao Urogallus *Linn.*) et du coq de Bruyères à queue fourchue (Tetrao Tetrix *Linn.*).

J'ai eu l'occasion de me procurer cet oiseau plusieurs fois pendant l'année passée, et je me suis convaincu, que ce n'est ni une variété ni une production de deux espèces différentes; mais une espèce particulière et nouvelle, dont voici la description:

Je l'appelle *Tetras intermédiair* ou *Tetrao* (Tetrix) *intermedius*, parceque sa grandeur, sa forme et sa couleur tient le milieu entre le grand et le petit Tetras.

Sa longueur depuis le bout du bec jusqu'à celui de la queue est de deux pieds six pouces. Son bec depuis sa pointe jusqu'aux coins de la bouche est d'un pouce et demie.

L'étendue des ailes d'un bout à l'autre est de trois pieds cinq pouces.

---

*) Vid. Linn. Faun. Suec. Edit. 2. pag. 72. Abhandlungen der Schwed. Academie VI. B. pag. 173. Sparrmann. mus. Carlson. pl. 15. Latham, Tetrao tetrix var. A. hybridus. Buffon. Beseke, Beiträge zur Naturgesch. d. Vögel Kurlands p. 69.

La distance depuis le genou jusqu'au bout de l'angle du grand doigt du milieu est de six pouces.

Le bec est fort et noire.

Au dessus des yeux la paux est denuée de plumes et pourvue de petits mamelons charnus d'un rouge très vif, ce qui forme un arc de demie cercle rouge.

L'Iris est brun de noix.

La tète, le menton, et la partie supérieure du col sont d'un brun foncé lustré.

Les plumes qui couvrent la partie inférieure et postérieure du col, et la partie supérieure du dos sont noires et variées de très petits points blancs et roussâtres qui sont à peine perceptibles.

Les plumes scapulaires et les couvertures des ailes sont rayées transversalement et en ziczacs de brun et de roussâtre de la même manière que le coq bruyères (Tetrao urogallus *L.*).

Les plumes du dessous des épaules et des ailes sont blanches.

Les deux premières grandes plumes de l'aile sont brunes; les autres sont de la même couleur; mais leur côté extérieur est bordé irrégulièrement de points blancs; leur tige est brunâtre.

Les plumes moyennes de l'aile sont jusqu'à la moitié blanches à leur racine, cequi, lorsque l'aîle est pliée, forme une tache de cette couleur; leur bout est brun et terminé d'un petit bord blanc; une partie de leur côté extérieur est variée de brun et de roussâtre, de la même manière que les plumes scapulaires; leur tige est noire.

Les longues plumes de l'aîle du dessous sont gris-cendrées et lustrées.

Les couvertures des plumes longues de l'aile du dessous sont gris à leur racine et blanches à leur bout. Les autres sont toutes blanches.

Le dos, le croupion et les petites couvertures du dessus de la queue sont noires variées de brun.

Les grandes couvertures du dessus de la queue sont brun et terminées d'un petit bord blanc.

La partie inférieure du col est d'une couleur de cuivre lustrée, changeante en violet.

La poitrine et la partie supérieure du ventre sont variées de taches blanches.

Les côtés sont d'un brun noirâtre variés de points très fins roussâtres.

Les plumes du bas ventre sont noires, celles de l'anus blanches.

Les couvertures du dessous de la queue sont noires à leur racine et terminées par une grande tache blanche.

La queue est noire et composée de dixhuit plumes, les quelles étant deployées forment une eventail: Les deux extérieurs de chaque côté sont les plus longues; elles ont huit pouces et demie de longueur, dont le bout est un peu tourné en dehors, ce qui rend la queue en quelque façon fourchue. Les autres vers le milieu diminuent jusqu'à la 7ème et 8ème de chaque côté; ces dernières sont les plus courtes et n'ont que 7 pouces et $\frac{1}{2}$ de longueur.

Les deux du milieu augmentent un peu, et sont terminées à leur bout par un petit bord blanc.

Les jambes sont couvertes de plumes fines, brunes et grisâtres jusqu'à l'orige des doigts. Les doigts sont bruns, et garnis de chaque côté d'appendices écailleux pectinés. Les ongles sont noirâtres.

La femelle est à peu près de la même grandeur que celle du petit Tetras (Tetrao tetrix), mais elle en diffère beaucoup par sa couleur.

Tout le corps est d'un brun noirâtre, tacheté et varié de plusieurs couleurs.

La tête et la plus grande partie du col a des rayes transversales rousses et noires. Sur les côté de la tête

au menton et à la gorge il y a des plumes rayées de noire et de blanc, formant des tâches irrégulières de cette dernière couleur.

Beaucoup de plumes sur les côtés du col et du dos sont brunes variées, et bordées d'un noir-violet très éclatant et lustré, de la même couleur que celle du coq de bruyères à queue fourchue (Tetrao tetrix *Linn.*).

Les plumes de la poitrine sont noires rayées transversalement de petits points blancs; la tige et la pluspart des plumes de la poitrine et quelquesunes des couvertures de l'aîle sont le long de leur milieu blanches, ce qui forme de rayes longitudinales blanches.

Le bas ventre est brun foncé. Les couvertures des aîles, les plumes scapulaires et celles du dessus de la queue et les côtés sont noires variées de petites rayes transversales grisâtres et rousses.

Les grandes plumes de l'aîle sont brunes; leur bord extérieur est varié de blanc, leur tige est de cette même couleur.

Les plumes moyennes de l'aîle ressemblent assez à celle du mâle; elles sont blanches à leur origine, leur bout est brun, rayé transversalement de noir et terminé d'un bord blanc.

Les couvertures du dessous de la queue sont blanches.

Les plumes de la queue sont variées à leur racine de couleur rousse et terminées à leur bout de noir et d'un bord étroit blanc.

La queue est composée de dixhuit plumes, dont dix du milieu sont beaucoup plus courtes et ne surpassent guère trois pouces et demie de longueur, tandis que les trois extérieurs de chaque coté augmentent l'une après l'autre jusqu'à cinq pouces et demie; étant à leur bout tournées en dehors, ce qui rend la queue très forchue et si ressemblante à celle du mâle d'un coq de bruyères à queue forchue, qu'il est très facile et pardonnable de croire au prémier coup d'oeil, que cet oiseau est une variété du mâle d'un petit Tetras.

Les jambes, les pieds, les doigts et les ongles sont ressemblants à ceux de son mâle, excepté qu'ils sont beaucoup plus petits.

Cette déscription détaillée fait voir clairement, que le mâle de notre Tetras intermédiaire se distingue beaucoup de celui du grand et du petit Tetras par sa grandeur qui tient le milieu entre les deux.

Les caractères qu'il a de commun avec le petit Tetras sont:

1) Le bec noire et le plumage du corps qui est presque d'une seule couleur lustrée et très peu variée.

2) Les plumes moyennes de l'aîle qui sont blanches à leur racine et forment une espèce de miroir de cette couleur.

3) L'absence de la tache blanche aux épaules.

Ceux qui correspondent avec le coq de bruyères sont:

a) La queue en eventail.

b) La couleur des couvertures des ailes.

c) La ressemblance des parties supérieures du ventre et des couvertures du dessous de la queue, qui sont noires tachetées de blanc.

On avoit ignoré jusqu'àprésent l'existence et les caractères de la femelle, tels que je viens de les indiquer; elle se distingue assez de la femelle du petit ou du grand Tetras pour qu'on ne puisse par s'y tromper; et il ne sera par difficile de détruire l'assertion, qui cet oiseau est un batard de deux espèces distinguées, quand on saura que de pareils individus ont été observées assez frequemment dans des pays différents et bien eloignés l'un de l'autre et qu'ils y sont connues et distingués par un nom particulier.

Le Tetras intermédiair se trouve en Ecosse, en Suède, en Courlande et au tour de cette Capitale; en Suède on le nomme *Rakkelhane*, et les chasseurs de ce pays, de même que les gens qui vendent le gibier au marché,

connaissent et distinguent et le mâle et la femmelle, sous le nom de полевая тетерка, ou du Tetras des champs, ce qui fait supposer que cet oiseau a même une manière particulière de vivre et prefère les champs aux forets; on prétend que sa voix est bien différente de celle du grand et du petit Tetras *) et Mr. *Klein* dit que les oeufs ont de taches qui sont beaucoup plus grandes que celles de la femelle du grand Tetras. Voilà, à ce qui me paroit, assez de raisons pour prouver, que notre oiseau est une espèce particulière et distincte.

Il semble que cet oiseaux n'est par des plus rares dans les environs d'ici; j'en dois quelques exemplaires à l'attention de Mr. *Freyreifs* qui s'occupe de l'art d'empailler toutes sortes d'animaux de nos environs dont il possède un haut degré de perfection, et qui a trouvé l'oiseau dont il s'agit au marché parmis le Gibier 8 à 10 fois pendant l'année passée.

---

*) Buffon's Naturgeschichte der Vögel v. Martini, Berlin 1777. 8°. 5. B. p. 57.

ALYSSI ROSTRATI ET ERODII SEROTINI DESCRIPTIO.

AUCTORE

C. STEVEN.

Conventui exhib. die 5 Julii 1809.

In itinere praeterito anno per Rossiam australem Moldaviae et Bessarabiae finitimam facto, plures collegi stirpes rariores nusquam in caeterâ Rossiâ obvias, quas inter duas necdum cognitas detegere contigit. Harum descriptiones et icones, illustri Academiae Scientiarum Petropolitanae, actis inserendas, si tanto dignas censeat honore, offerre audeo.

1. *Alyssum rostratum, caule herbaceo stricto, foliis lanceolatis, siliculis ellipticis canescentibus, stylo longo terminatis.* Tab. XV.

Descriptio.

Radix annua ramosa albicans.

Caulis ut tota planta pilis stellatis canescens, basi purpurascens, solitarius, strictus, pedalis, superne in ramos aliquot divisus caule parum breviores.

Folia alterna lineari-lanceolata sessilia basi attenuata apice

obtusiuscula, integerrima, scabra, subtus magis canescentia, sesquiunciam vel unc. 2 longa lineas 2 — 3 lata.

Racemi in ramis terminales, simplices, florentes brevissimi, deflorati spithamaei. Pedunculi fructiferi semiunciales angulo acuto patentes.

Calyx deciduus erectus flavus, foliolis linearibus acutis pilis stellatis scabris.

Petala spathulata obtusa calyce duplo longiora, sature lutea. (*b*)

Stamina b. duo minora basi e receptaculo squamula fulta (*e*) filamento breviore; 4 majora in medio denticulo notata (*c*), vel trifida sic ut in Ornithogalis (*d*).

Silicula elliptica turgida magnitudine lentis, pilis stellatis canescens, 2 - rarius 4 - sperma apice integerrima, terminata stylo longitudine ipsius siliculae. (*f*)

Semina plana ovata immarginata. (*g*)

Habitat rarior in rupibus calcareis ad Tyram fluvium, in vicinia castelli Bender. Floret Junio.

Species a reliquis Alyssis annuis distinctissima, siliculis stylo longo terminatis.

---

2. *Erodium serotinum, pedunculis multifloris, foliis ternatis, foliolo medio sessili pinnatifido, radice perenni, caulibus diffusis.* Tab. XV.

Descriptio.

Radix alte descendens lignosa multiceps fusca. Hybernacula squamis plurimis acutis fuscis tecta.

Caules plurimi prostrati demum adscendentes, dodrantales vel pedales, geniculis tribus vel quatuor, parum ramosi, angulato - compressi, pro loco natali plus minusve hispidi et subviscosi pilis reflexis, basi purpurei.

Folia opposita, caulina petiolo folium subaequante, radicalia duplo longiore, utrinque parum pubescentia, ternata, foliolo *medio* sessili basi cuneato, supra medium pinnatifido, laciniis incisis et dentatis, dentibus nunc acutis, nunc obtusiusculis, saepe glandula terminatis - *lateralibus* divergentibus sessilibus lanceolatis incisis, basi inferne lobo minore saepe integerrimo auctis.

Umbellae 5 — 10 florae, pedunculo folio longiore, pedicellis sub - uncialibus viscoso pubescentibus, fructiferis saepe fractis unilateralibus. *Involucrum* breve polyphyllum foliolis acutis scariosis.

Calyx foliolis lanceolatis margine membranaceis tri vel quinquenerviis pubescentibus, aristà foliolo plerumque triplo breviore, interdum tamen aequante vel imo longiore.

Corolla E. ciconii, petalis rotundatis obtusis, saepe quoque emarginatis, calyce duplo longioribus, violacea venis saturatioribus.

Stamina 5, longitudine calycis, filamentis liberis basi dilatatis; antheris sordide violaceis.

Pistillum longitudine staminum.

Arilli valde hirsuti longitudine calycis. Aristae biunciales, basi tantum introrsum barbatae, apice nudae, scabrae.

Semina ovata, laevia, fusca, sesquilineam longa.

Occurrit in campis versus mare nigrum, inter Odessam et Tyram fluvium; in valle humida ad rivum Kutschurgan copiose, in campo elato in vicinia urbis Bender rarius. Fl. Augusto, Septembri.

Pro loco natali maxime variat. In siccis caules hispidi vix spithamaei, adscendentes, purpurei, folia minora minus divisa; in humidis caules sesquipedales humifusi glabriusculi, folia magna profundius divisa. Flores saepe abortiunt.

MAMMALIA CAPENSIA,
RECENSITA ET ILLUSTRATA
A
C. P. THUNBERG.

Conventui exhib. die 10 Aprilis 1811.

Maxima illa, hominibus parum habitata incultaque pars orbis terrestris, quae *Africa* audit, in campis suis vastissimis, montibus, frutetisque plures alit Mammalium species, quae vel adhuc minus nobis cognitae sunt, vel ante paucos annos rectius innotuerunt. *Canis, Felis, Viverrae* et imprimis *Antilopes* species non modo invicem, sed etiam cum aliis saepe fuerunt confusae; quin et ipse *Camelopardalis* diu dubius fuit, et *Elephas africanus* maximae molis ejusdem cum *Asiatico* speciei diutissime habitus.

Ad illustrandam historiam Mammalium Africes australis, observationes, quae haec concernunt, in itineribus meis per Caput bonae spei institutis collegi, examinavi et in ordinem redegi, ut instar Faunae remotissimi hujus promontorii cum Orbe Erudito communicari possent. Dum miratus mognopere fui, neminem huc usque vel *Floram*

capensem aeque amplam, ac ab aliis regionibus diversam, vel *Faunam* capensem, admirandis animalium speciebus divitem divulgasse; credidi, non opus fore operatum, vel omne oleum deperditum, si relatione brevi et descriptionibus circumscriptis, quae mihi innotuerunt Mammalium species, publici juris facerem, eorumque characteres, habitacula, vivendi rationem, cetera, quantum mihi explorare licuit, proponerem.

Ultra quinquaginta species Quadrupedum viviparorum heic inveni, quas inter plures sunt huic regioni propriae, ut Myrmecophaga *capensis;* Canis *mesomelus;* Felis *capensis; Viverra felina, grisea* et *tigrina;* Meles *mellivora;* Hyrax *capensis; Arctomys capensis, maritima* et *vigil;* Lepus *capensis;* Dipus *caffer;* Sciurus *capensis;* Antilope *leucophoea, oreotragus, cleotragus, strepsiceros, sylvatica, maculata;* Capreolus *campestris, nicticans* et *Melanotis;* Ovis *capensis;* Bos *caffer* et *Gnu;* Equus *quagga;* Sus *aethiopicus.* Enumerant Auctores et alias, sed a me non visas, ut Viverram *Caffram* et *Zenik*, atque murem *lineatum.* Nec desunt animalia mansueta, vel ab Europaeis huc delata, ut Canis *familiaris*, Felis *catus*, mus *musculus* et *rattus*, Bos *taurus*, Sus *scrofa*, Equus *caballus* et Capra *hircus.*

1. *Simia Sphinx*, ab incolis *Babian* dictus, montes imprimis inhabitat inque rimis rupium sese occultat. Animal, magnitudine Canis, crudele est, dentibus fortiter se defendit, dum fuga salutem quaerere non liceat. Canis unus vel alter adultum in campis non capit, et in summis montium cacuminibus saepe sclopeti ictus contemnit. Homines interdum, montes adscendentes, jactis lapidibus adgreditur, et ni bombardis armati fuerint, repellit. Junior captus parum mansuescit, arbores celerrime adscendit et non raro furiosus evadit. Eradicat bulbos Ixiarum, Gladiolorum, Iridum, quos edit. In hortis colonorum fructus noctu aufert gregarius et ad montium usque cacumina transportat. *Buffon*. Edit. *Allamandi* 4°. Tom. 14. T. 13 et 14.

2. *Simia Sabaea* locis sylvestribus rarius occurrit.

3. *Myrmecophaga capensis*, *Aard-varke*, sive sus terrestris colonis dictus, in campis cuniculos fodit, ubi die latet, noctu exiens nutrimentum quaesiturus. Junioris Suis magnitudinem attingit, Porco setis cinereis et rostro producto valde similis. Vivit *Formicis* et *Termitibus*. Noctu canibus venatur ferroque necatur. Caro, lumborum praecipue, a colonis editur, salita et fumata. *Buffonii* Hist. Natur. Mammal. Editio *Allamandi* in 4°. Tom. 5. Tab. II.

4. *Canis aureus*, *wilde Hund* dictus, gregatim in campis vesperi et noctu animalia fera et mansueta callidissime venatur, prae aliis minores Antilopes species, Struthiones et oves colonorum. Praedam occisam Leo non raro sibi tribuere solet, post prandium, quod superest, venatorum gregi relinquens. Majoris canis statura cognoscitur sono latratui simili et corpore lutescente nigroque maculato. Callidissimum animal rarius plumbo occiditur.

5. *Canis mesomelus*, Vulpe minor, magnitudine circiter Lagopi, in tota colonia communis ubique invenitur, licet pelles Europaeis parum aestimentur. Dorso griseo pilis albis nigrisque intermixtis facile distinguitur; et haec pars dorsalis a reliquo corpore testaceo diversa Hottentottis valde expetita pro bursa priapi inservire solet.

6. *Hyaena maculata* appellatur plerumque *Tyger-Wolf* et ubique fere occurrit, etiam simpliciter *Wolff* dicta, cum Lupo Europaeo tamen non confundenda. Non nullis in locis maritimis *Strand-Wolff* audit et audacissimum dicitur animal. Circa solis occasum exspatiatur, clamores variorum animalium imitans, praedam quaesitura. Adgreditur Equos, Tauros et alia animalia. Etiam cadavera effodere perhibetur. Occiditur pulvere capsularum *Taxicodendri*, nucis vomicae instar, cadaveri immixto;

etiam capitur intra muros argillaceos cum janua suspensa, ad attactum cadaveris facillime decidente.

7. *Felis Leo* in ipsa colonia Hollandorum jam rarior, in interioribus regionibus vulgatissimus. Mas cum femina et pullis noctu vagatur, majoribus animalibus terribilis hostis. In locis depressis desertorum Africes, ubi aquam quaerunt Boves, Equi, Zebrae et numerosi Antilopes, occultatus horum animalium grandiorum dorsum insilit, dentibus et unguibus lacerat atque occidit. Neque, dum fames urget, homini parcit, Hottentotum tamen Europaeo semper praeferens. Gregibus colonorum bovilibus in remotis provinciis Leo fatalis semper est hostis; bovem maximum facillime necat, cumque praeda dorso imposita aufugit. Facile tamen armis igniariis audax et intrepidum animal eradicatur. Immense timent Hottentotti Leonem, uti et omnia atque singula animalia, prae metu membris omnibus trementia. Caro quandoque Hottentottis sapit, cute rarissime usitata.

8. *Felis pardus*, elegans certe bestia, in australi Africa valde vulgaris, tam in campis arenosis et fructiculosis, quam in montibus, interdum gregaria. Magnitudo majoris canis. Junior magis albidus cum ocellis — dorsalibus paucioribus; adultior flavescens cum ocellis — compositis ex maculis nigris. Minores saltu adgreditur Anti-

lopes, Lepores, oves colonorum et quoque homines, licet nullum ex illo occisum vidi vel audivi. Pelles Europaeis venales in Europa vario usui et ornamento inserviunt, Caffris pro vestimento. *Buffon.* ed. *Allamand.* Tom. 9. Tab. 11. et 12.

9. *Felis jubata*, pardo multo rarior, cinerei coloris cum maculis nigris simplicibus et juba colli humerorumque suberecta, ejusdem fere magnitudinis. Incolis parum nota, uti et in Musaeis rarius occurrens.

10. *Felis capensis* prioribus paulo minor et testacea, dignoscenda lineis dorsalibus et maculis simplicibus lateralibus albis. Incolis *Tygerboschkatt*, id est, Tigris sylvestris appellatur et hinc inde occurrit.

11. *Felis Chaus*, Sibiriae alias incola, etiam Caput bonae spei inhabitare a me inventa est, tota cinerea cum fasciis dorsalibus. Cauda basi atro-maculata, versus apicem annulos paucos habet nigros, ipso apice semper nigro. Optime tamen distinguitur auriculis suis extus laevibus ferrugineis. Colonis dicitur *wilde Katt*, et primo intuitu Cato domestico adeo similis videtur, ut pro eadem specie facile habeatur; duplo tamen major est. Femina minus fasciata deprehenditur.

12. *Felis Caracal*, nomine *Roode Katt* insignita, unicolor est, uti Leo, sed magnitudine Canis mediocris,

auriculis uti in Lynce fasciculo piloso nigro erecto instructis, et caudae quoque apice nigro. Parum valet cutis, quae interdum a colonis, ad sudorem excitandum, membris arthriticis imponi solet. *Allamand.* T. 19. T. 24.

13. *Viverra tetradactyla, Surikattje* appellata Hollandis, locis montosis occurrit, et nucibus amygdalisque delectatur. Mansuescit, et ni bene observatur, vestes aliaque utensilia lacerando deperdit, Sciuro vulgari parum major. Palmae tetradactylae, plantae pentadactylae unguibus brevibus obtusis. Supra ferruginea pilis albis intersparsis et fasciis fuscis. Abdomen et pedes rufescentes. Cauda corpore sesquilongior, ferruginea apice nigro. Habitat in antris, die dormit, ad occasum solis exit. Animal minus bene notum, forsan a V. tetradactyla, forsan etiam a Viverris separandum, ulteriori examini subjici meretur.

14. *Viverra ichneumon,* uti in Aegypto, ita et heic occurrit, brunnea pilis albo-annulatis, catoque domestico sesquilongior, paulo angustior, caninis dentibus validis et unguibus curvis acutis armata.

15. *Viverra grisea,* videtur esse *Nems,* depicta Tom. 4. Tab. 26. in *Buffoni* Editione Amstelodamensi quarto, ab illustri Professore *Allamand,* et forsan eadem esse potest cum *Linnaei* Viverra *Caffra* in Syst. *Gmelin.* T. 1. p. 85. magnitudine Viverrae *ichneumonis,* tota grisea

e pilis longis albo nigroque annulatis. Cauda longitudine corporis apice nigra pilis longioribus.

16. *Viverra barbara, Linnaei* Mustela *barbara*, ultra ulnam longa; cauda cylindrica, obtusa, corpore brevior, nigra. Pollices non remoti. Tota supra infraque nigra pedibus atris, capite colloque cinereis malculaque colli alba triloba.

17. *Viverra tigrina*, interdum *Moschus-Katt* dicta, longitudine Cati, sed angustior. Sordide cinerea maculis atris sparsis et cauda nigro-annulata. Moschum vehementissime olet, etiam pellis detracta, sic ut neque ab hominibus ferri possit, neque a canibus. Satis vulgaris.

18. *Viverra felina*, pulcherrima et aligissima species nova, a memet in Actis Holmensibus descripta et depicta fuit. Valde similis Viverrae *tigrinae*, sed albidior, major et longe aliter nigromaculata.

19. *Viverra Zorilla*, pulcherrima facile dignoscitur corpore toto nigro, maculis albis elongatis vario. Non adeo raro occurrit, et difficile occiditur ob velocitatem admirandam, qua aufugere solet haec etiam in America habitans bestiola. *Allamand.* Tom. 13. Tab. 42.

20. *Meles mellivora*, multum a Zoologis confusa, eadem est cum *Linnaei* Viverra *capensi*, Syst. Nat. *Gmelin.* Tom. I. p. 89. et Viverra *mellivora* ibid. pag. 91. nec non *Sparrmanni Ratel*, descripto in Actis Stockholmens.

1777. Tab. 4. fig. 3. p. 147. Inhabitat interiores Capitis bonae spei regiones, victitans imprimis melle apum, quarum colonias sollicite quaerit, ope Cuculi *indicatoris* indagat et spoliat. Animal toto habitu Meli *europaeo* simile, licet minus, tegitur potius setis rigidis, quam pilis, et unguibus longis, robustis, subtus cavis armatur. Supra a capite ad caudam macula lata, magna, cinereo-albida extenditur; subtus atra uti et artus, linea utrinque laterali albida. Cauda vix pedum posteriorum longitudine. Hottentottis *Ratel* dicitur, colonis europaeis vero *Honing-Freter*.

21. *Talpa asiatica*, quae *Blinde Moll* dicitur, saepe hortos Europaeorum in urbe inhabitat, cuniculos effodit, multumque damni adfert ac culta destruit. Talpa eurooropaea multo minor est elegantissima haec species, omnibus Iridis coloribus splendidissima.

22. *Hyrax capensis* frequenter rimas montium inhabitans, *Dass* et *Klipp-Dass* nominatur. Cati fere magnitudine totus griseo-ferrugineus et ecaudatus est. Caro fusca, sicca, parum sapida, Europaeis tamen non nunquam in cibum cedit.

23. *Arctomys maritimus*, *Linnaei* Mus *maritimus* in Syst. *Gmelin.* Tom. I. p. 140, inhabitat amplissimos, extra urbem Cap, campos maritimos et sabulosos, ubi fossas frequentes effodit, ambulatoribus et imprimis equitantibus tae-

diosissimas. Duplicem inveni varietatem, alteram totam niveam, *witte Moll* dictam, majorem Cati dimidia magnitudine, in Itineris mei Tomo primo sub titulo Marmotae africanae depictam; alteram testaceam totam, paulo majorem. — Cauda pedibus brevior. Ungues tetradactyli, acuti. Dentes longi, exstantes, validi; primores superiores sulco exarati.

24. *Arctomys capensis, Bless-Moll* appellatus, multoties minor est A. maritimo, magnitudine circiter Ratti, cinereo-fuscus, maculis tribus supra in capite albis. Habitat in dunis sabulosis et Europaeorum hortis, quibus multum adfert damni; a *Linnaeo* in System. *Gmelin.* Tom. I. p. 140. ad mures, sub titulo muris capensis, minus recte refertur, cauda brevissima instructa. *Allamand.* Tom. 5. Tab. 9. et Tom. 4. Tab. 28.

25. *Arctomys vigil,* nova species. In desertis siccissimis, Carro dictis, hunc inveni imprimis numerosum, ubi in terra argillacea cuniculos, orientem versus apertos et oblique descendentes construit. Sole oriente claustra dimidia exit gregarius et difficile plumbo occiditur, ad visum ignem ocyssime se retrahens. Magnitudine Ratti rufescens, lateribus subtusque griseus. Cauda corpore triplo brevior, setosa. Dentes bini primores utrinque, truncati, cuneati seu basi crassiores; superiores extus sulco exarati:

canini nulli: molares plures, truncati. Palmae tetradactylae; plantae pentadactylae, unguiculatae.

26. *Lepus cuniculus* in insula, quam appellant *Tareneyland* vulgatissimus et jam saltem spontaneus obvenit; certe autem asseverare non possum, an ante longius retro tempus ex Europa allatus, heic indigenus factus fuerit. Nullibi alias in hisce regionibus illum inveni.

27. *Lepus capensis* in depressis sabulosis campis extra urbem Cap et alibi occurrit frequenter et copiose, Lepori timido similis, sed cauda pedibusque rufis distinctus. Adeo heic contemnitur, ut raro occidatur, fereque nunquam caro comedatur.

28. *Dipus caffer* vocatur *Berg-Haas*, cum locis montosis et in rimis montium habitet seseque occultet; etiam *Spring-Haas* dicitur ob pedes posticos longissimos, quibus saltus admirandos aufugiens instituit. Leporis timidi fere magnitudine, cauda vulpis ornatur. *Allamand.* T. 5. T. 39. *Sparman.* Act. Holmens. 1778. p. 119.

29. *Sciurus capensis*, ignota ante species. Supra dorso lateribusque flavescens, subtus albus. Cauda albo-flavescens. Pili caudae longi, molles; corporis vero duriores, sic ut, dum baculo castigatur, sonus edatur fere ut in Hystrice. Femina minor, magis grisea. Agilis ubi

Sciurus vulgaris. Ab Hottentottis in regione Namaquas, ubi habitat, dicitur *Aguimp*.

30. *Hystrix cristata* sive *Steekel - Varken* incolarum, in hisce regionibus frequens obvenire solet, saepeque ab Europaeis venata. Sub terra in fossis suis die tranquilla dormit, noctu exiens cibum quaesiturà. In hortis olera varia, Brassicam et similia edit, atque radice Callae aethiopicae multum delectatur. Caro edulis Europaeis. Noctu canibus venatur et lanceola ferrea trucidatur. Nunquam audivi, quod hisce in terris, uti in Indiis, lapides bezaordici intra viscera fuerint inventi.

31. *Camelopardalis Giraffa*, speciosissima forsan inter Mammalia, altissime caput suum collo longissimo omnium, velut Struthio inter Aves, stipatum extollit. A promontorio australi septentrionem versus, in regionibus valde remotis Namaquensibus habitare solet Camelopardalis, victitans vegetabilibus, gramine, frondibus, etiam Mimosis spinosis; atque, uti pecora reliqua, ruminat. Caput ore parvo, oculisque magnis vividis. Cornua ovo fere similia, erecta, truncata, apice pilosa, respectu animalis parva, sexpollicaria. Lingua acuta, scabra. Dentes primores inferiores octo; molares sex. Collum longissimum erectum. Juba dorsalis. Pectus latius, gressu non inamoeno vel claudicante. Genu absque callo. Ungulae fissae. Longitudo

18 pedum, altitudo antice 17, postice 9. Color subaurantiacus, maris saturatior, feminae pallidior cum maculis fuscis sparsis. Calcitrat uti Equus. Mammae quatuor feminae pullum unicum parientis. Circa annum 1761 de hocce animali, veteribus noto, certiorem habuimus cognitionem et postea pluries visum fuit, occisum atque pelles ejus in Europam transmissae.

In campis suis, montibus et sylvulis Africa australis verosimiliter plures alit Antilopes species, quam quidem ulla alia regio. Hac quasi mediae sunt inter Capras et Cervos, similes illis cornibus suis, his pilositate breviori. In septentrionali Africa sequentes inventae fuerunt species, scilicet *Lervia*, *Dama*, *redunca*, *Kevella*, *Corinna*, *lubalis*, *scripta*, *grimmia*, *pygmaea* et *cervicapra*. In promontorio australi a memet adnotatae fuerunt insequentes:

32. *Antilope Oreotragus*, a colonis *Klipp-Springer*, ab Hottentottis *Kainsi* dicta. Semper in summis montibus ad ultima usque cacumina confugit, in monte tabulari prope Cap, in Namaquas et alibi, raro vel canibus capienda, vel plumbo occidenda. Grisea tota est pilis fragilibus et facile deciduis. Cornua recta, erecta, nigra, tertiam partem annulata. Ungulae rotundatae. Pardis venatur. *Allamand.* T. 5. T. 29.

33. *Antilope Capreolus*, *Rhebock* vocata, tota supra grisea instar Leporis, pilis albis et nigris mixtis. Pectus, abdomen femoraque intus atque cauda apice alba. Aures lanceolatae, erectae, longitudine capitis. Cauda brevis, erecta sub cursu, supra grisea, subtus alba, longitudine fere femorum. Cornua maris recta, subulata, basi annulata, plus quam palmaria: feminae nulla. Confugit semper ad montes. Magnitudo vituli. Habitat in campis sabulosis prope Cap, in *Langé Kloof* et alibi inter frutices, uti et in regionibus circum *Piket-Berg*.

34. *Antilope nictitans*, *Duiker*, inter frutices in campis et dunis extra Cap vulgaris, tota brunnea, tres pedes longa, duos cum dimidio alta. Mari cornua sunt recta, nigra, fere parallela apicibus extrorsum flexis; feminae nulla. Cauda quinque pollices longa, aures septem. Sinus lacrymalis sub oculis exstans. Hortis colonorum valde noxia.

35. *Antilope melanotis*, *Greis-Bock* vocata ab Hollandis, tota grisea est, sive pallide brunnea pilis argenteis intermixtis. Longitudo duorum pedum, novem pollicum; altitudo pedis unius cum novem pollicibus. Sinus lacrymalis perspicuus. Cornua feminae nulla; mari recta, nigra, laevia et acuta, quatuor pollices longa. Hortis et vinetis multum adferre solet damni.

36. *Antilope Campestris, Steen-Bock,* cum prioribus vulgaris inhabitat campos inter urbem et catenam montium, sabulosos, fructiculosos. Parva est, supra rufa, subtus paulo pallidior. Cornua hujus subulata sunt, recta, basi digitum crassa absque annulis, suberecta, fusca, palmaria. Linea frontalis fusca. Femina inermis. Caro sapida, raro tamen in usum venit. Haec quoque species hortis europaeorum noxia. Verosimiliter cum Antilope Grimmia conjungi non potest. Ab auctoribus multum fuit confusa, et varie admodum descripta, ut videre licet in editione *Allamandi,* Supplement. 4. p. 43. et Suppl. 5. p. 119. *Grimmia* vera in Guinea habitat, et forsan non in Capite bonae spei, ubi et *campestris, nictitans* et *melanotis* ut distinctae species respiciendae sunt.

37. *Antilope Oryx, Gems-Bock* speciosa est, uti Cervus Elaphus, cornibus rectis, longissimis, attenuatis, acutis, deorsum versis, longitudine dimidia animalis, quibus morose se defendit. Caro sapida. In campis versus septentrionem ab urbe extensis habitat. *Allamand.* T. 4. Tab. 42.

38. *Antilope leucophaea, Blauwe-Bock,* habitat versus orientem, in campis montosis inter Hottentots-Holland et Swellendam, parum gregaria et plerumque rarior. Cornua utrique sexui erecta, posteriora versus arcuata, mul-

tum annulata. Tota coerulescens e pilis albis nigrisque mixtis. Litura ante oculos alba. Cauda apice alba, comosa, brevis. — Caro sapida estimatur. *Allamand.* T. 4. T. 63.

39. *Antilope Orcas, Eland* dicta ob magnitudinem insignem, equi aemulantem, cinerea: linea per medium dorsum et extremis pedum nigricantibus. Cornua sexus utriusque recta, basi oblique parce annulata, pedalia. Porus sebiferus nullus. Imprimis loca montosa amat. Singularis est jugulo suo pendulo. Inter delicatiores numeratur et caro et praeprimis lingua. Cornua fumando tabaco Hottentottis inserviunt. *Allamand.* Tom. 5. T. 7. *Sparrman* act. Holm. 1779. p. 155. c. Tab.

40. *Antilope Eleotragus, Ritbock* sive *Rit-Rhebock* dicta, junior magis rufescit, adulta imprimis mas, magis grisea, absque linea laterali. Cornua spithamaea, ad medium usque annulata, antrorsum arcuata, acuta. Auriculae longae, uti et cauda longiuscula. Pectus antice jubatum. Femina inermis. Saepe latet in gramine alteriori riverum, unde nomen a colonis impositum; vid. *Buffon* ed. *Allamand.* Suppl. 5. p. 34. T. 13 et 14.

41. **Antilope Monticola, Ourebi* ab Hottentottis appellata, in Actis novis Holmensibus a memet nuper descripta et depicta fuit. Leporis magnitudine, tota brunnea,

linea frontali duplici et cornubus maris bipollicaribus, conicis, altero latere tantum annulatis. Femina inermis, cujus figura videatur apud *Allamand*. T. 5. T. 12. Etiam in Guinea haec species fuit inventa a D. *Afzelio*.

42. *Antilope Sylvatica*, *Bosch-Bock*, colore rufa seu brunnea, maculis lumborum albis. Occupat plerumque sylvulas et difficulter plumbo occiditur. *Allamand*. Tom. 5. Tab. 15. *Sparrman* Act. Holmens. 1780. pag. 197. c. Tab.

43. *Antilope Maculata*, *Bonte-Bock*, rufa maculis albis. Loca amat elevata et aprica circum Swellendam et alibi. Magnitudo Vituli majoris. Cornua erecta, sensim attenuata, apice incurvata, nigra, parum oblique annulata, pedalia. Caput brunneum, antice album maculaque oblonga infra cornua alba. Aures canescentes, longitudine dimidia capitis. Dorsum canescenti-brunneum; latera fusco-brunnea. Pectus, abdomen, femora dimidia intus, tibiae, cauda basi anusque supra caudam alba. Femora brunnea, extus et prope tibias intus. Cauda nigra, setosa, longitudine femorum. In itineris mei parte 2. p. 50. *scripta* dicta fuit. *Allamand*. T. 5. T. 16.

44. *Antilope pygarga*, cui nomen *Spring-Bock* impositum fuit, gregibus majoribus saepe ambulat in campis apricis et desertis, maxime in Namaquas regionibus

versus septentrionem, e quibus certis interjectis annis, per multa millia gregatim, versus promontorium australe emigrare solet. Edit persecuta saltus 15, usque 25 pedes in altum, dum simul macula alba supra caudam magnopere in latitudinem extenditur. Adultam canis vix ullus sequi valet. Venatur a Fele Pardo, Leone, Hyaena, aliis. Caro sapida. Pellis pro sacculis conficiendis inservit. Magnitudine ovis. Cornua subulata, nigra, basi oblique annulata, curvata in formam S romani apicibus inflexis, spithamaea. Dorsum rufescens. Pectus et abdomen alba, uti et cauda palmaris. Linea lateralis brunnea. Dorsum a medio ad caudam pilis longis albis deflexis expansilibus et erigendis. Femina aeque cornuta. *Allamand.* T. 4. T. 60. *Sparrman* Act. Holmens. 1780. p. 275. c. Tab.

45. *Antilope Dorcas, Harte-Beest*, fusco-brunnea, cornubus multum tortis. Gregatim cursitat in campis graminosis apricis interiorum regionum versus orientem. Cutis tenax pro funibus usitata colonis. Venatur plerumque equis; animal mite, quatuor pedes altum, magnitudine equi mediocris. Labium inferius nigrum, ad marginem utrinque fasciculo pilorum nigro notatum. Lineae nigricantes per cervicem et humeros anticos longitudinales. Cauda longiuscula, atra, setis hirta et floccosa, pedalis. Caro sapida, sicca. Cornua spiralia acuta et 20 pollices

longa. *Allamand.* T. 5. T. 25. *Sparrman* Act. Holmens. 1779. p. 151. c. Tab.

46. *Antilope Strepsiceros*, cognomine *Kudu*, equum magnitudine aequat, cornubus spiralibus elegantissima. Inter arbusta plerumque versatur. Caro sicca minus bona censetur. Pellis tenacissima pro curribus trahendis usitata. Cornua erecta, spiralia, carinata, acuta, intus subrugosa, cinerea, laevia, quadripedalia. Femina inermis. Corpus cinereum linea dorsali alba, fasciaeque albae lateraliter decurrentes, plures et magis perspicuae in junioribus. Juba dorsalis. Sub oculis maculae albae. Barba mentalis. Longitudo novem pedum, altitudo quatuor. Facies bilineata. Pectus et pedes albida. *Allamand.* edition. *Buffon.* Tom. 4. Tab. 61.

47. *Ovis aries:* capensis, praecipue cauda sua ponderosa, tota e pinguedine constante, dignoscitur. Cicurata ubique invenitur, tam apud Hottentottos, quam Europaeos accolas. Cauda saepe 50 libris constat, longa, pendula, deliciosa. Caro hujus ovis nutrimentum vulgatissimum Europaeorum et nautarum. Lana minus expetita, raro usitata. Pelles Hottentottis pro vestimentis inserviunt. In desertis magis pinguescit; nunquam tamen spontaneam vel feram inveni. Edit varia vegetabilia, etiam venenata absque damno, ut teneriora gramina, ramos oleae europeae

et acris Montiniae Euphorbiarumque, Mesembryanthema, atque alios succulentos frutices. Testiculi ovium assati ab Europaeis comeduntur.

48. *Bos Caffer* sine dubio maximus et robustissimus in hoc genere. Cornubus basi latissimis et crassissimis primo intuitu a congeneribus diversus judicatur. Inhabitat orientalem Africae australis plagam et loca graminosa cum sylvis mixta. — Ab incolis *wilde Buffel* salutatur saepiusque sclopetis occiditur. Caro sapida, tam ab indigenis, quam ab incolis europaeis multum expetita, vel recens, vel fumo indurata. Pelles mercatoribus venales sunt pro corio parando et colonis in remotioribus plagis pro calceis, *Veld-schoenen* dictis. Facies, mentum, collum longioribus pilis ornantur. Corpus fuscum, parum villosum. Caudae basis nuda, ceterum pilosa. Centum, usque plura centena gregatim versus vesperam umbras relinquunt pastum quaesitura; die in sylvis latent. Vacca 12 menses gravida perhibetur. Currit velociter, et nunquam rite cicuratur. A leone non raro captus necatur. Ab Hottentottis in magnis foveis, telis et lanceis ferreis occiditur. Plura recensentur in itineris mei volumine secundo, pag. 94. inque Actis Holmensibus, 1779. pag. 79. c. Tab.

49. *Bos Gnu*, priori longe rarior, minor et maxime singularis est, cornibus basi dilatatis, antrorsum recurvatis;

barba mentali jugulari et pectorali; juba colli erecta; cauda equina; poro cerifero; pedibus gracilibus et villo brevissimo. Altitudo quatuor circiter pedum, longitudo quatuor cum dimidio. Currit velocissime et calcitrat, atque cornubus obversis, etiam genubus impositus fortissime se defendit. Interiores et remotissimas tantum regiones, plerumque solitarias inhabitat rarum hoc animal. Secundum meum exemplar descriptus et depictus a Prof. *Sparrman* in Actis Holmensibus 1779. p. 75. c. Tab. *Allam.* T. 15. T. 14.

50. *Bos indicus* a ceteris optime dignoscitur tuberculo humerali, et a nonnullis indigenis Hottentottis Caffrisque cicuratus, nunquam ferus a me visus. *Allamand.* T. 11. T. 42.

51. *Equus Zebra*, gregarius campos interiores occupat, *wilde Paard* vocatus et elegantissime pictus. — Cicurari nescius, ferox, fortis, celer, calcitrando et mordendo se defendit. Praeda tamen leonis non raro evadit. *Allamand.* T. 12. T. 1. 2. 3.

52. *Equus Quagga*, pro femina Zebrae antea diu habitus, cum Zebra multa habet communia; minus tamen picta est et minor. Rarius occurrit minoribus gregibus, a Zebra semper separatis. *Allamand.* T. 5. T. 6.

53. *Sus africanus, wilde Varken,* hinc inde occurrit, rarius tamen a me visus.

54. *Sus aethiopicus*, horrendum animal et crudele rostro latissimo, interiores provincias tantum inhabitat. Ab illustriss. Zoologo Dr. Consiliar. et Equit. *Pallas* optime descriptus et icone illustratus. *Allamand.* T. 15. T. 1.

55. *Rhinoceros bicornis, Ronnoster* appellatus incolis, versus orientalem et occidentalem plagam, plerumque solitarius vagans. Corpus fuscum, ponderosum, septem pedes altum, duodecim longum. Cornu cartilagini naris adnatum, anterius saepe 20 pollices attingit vel ultra, conicum; alterum triplo brevius. — Extra coloniam habitat locis incultis fruticulosis. Cutis glabra plumbum permittit. Oculi capitis respectu parvi, profundi. Iratus cornu terram arat. Calcitrat, urinam mittit et celerrime currit. Caro sapidior Elephantina, Hippopotami deterior. Cutis pro bacculis praeparatur, crassitie pollicaris, subdiaphana. Ramis arborum, prae aliis Stoebes *rhinocerotis* nutritur. Pedes trilobati. Die quiescit, vesperi pastum quaerit. Odor fortis. *Allamand.* Tom. 5. Tab. 5. *Sparrman* Act. Holmens. 1778. p. 303. c. Tab.

56. *Elephas africanus* molaribus dissimilibus ab *asiatico* differt, quodque hic nunquam cicuratur. Grega-

tim vesperi exit cibum e gramine altiori arborumque ramis quaesiturus. Propius urbem antea magna copia fuit inventus, jam vero vel occisus, vel ad remotiores regiones fugatus. Altitudo 12 pedum. Pedes quinquelobi. Femina 18 menses gravida unicum parit pullum. Caveis magnis effossis capitur plumboque occiditur ob dentes caninos pretiosos et variis utensilibus inservientes. *Allamand.* T. 4. T. 55. Tom. 11. Tab. 1. Tom. 5. Tab. 21.

57. *Hippopotamus amphibius* e maximis Mammalibus terrestribus, die latet in fossis rivorum, noctu exiens cibum sumturus e gramine et frondibus. Caput grande auriculis acutis parvis. Juxta labia fasciculi aliquot pilosi. Corpus subnudum. Os amplum. Majores rivos ad ostia maris, in regionibus orientalibus adhuc inhabitat, e colonia ipsa omnino fugatus. Cutis crassa baculis conficiendis inservit. Caro consumitur ab Hottentottis, pinguedo autem imprimis in deliciis habetur. Longitudo 17 pedum, altitudo 7. Natat optime, adscendit ad superficiem aquae, ut respiret. Occiditur plumbo et capitur in magnis fossis. Dentes validi albissimi vario usui inserviunt. *Allamand.* T. 12. T. 3. Tom. 5. T. 1 et 2. *Sparrman* Act. Holmens. 1778. p. 329. c. Tab.

58. *Phoca Antarctica* mare australe inhabitat.

59. *Phoca Leonina*, *Zee-Leuw* sive Leonis marini nomine insignita, ad littora quandoque portus capensis, Taffelbay dicti, rejecta fuit mortua.

De cetero phocarum species heic, uti alibi fere ubique multum obscurae, nec satis examinatae sunt. Plumbo quotannis occiditur species quaedam in insula Robben-Eyland, in Saldanha-Bay et alibi. In Robbe-Berg speciem vidi palmis et plantis pentadaclytis unguiculatis, cui penis erat osseus, osse antice obtuso bifido.

Trichechus manatus et *dugon*, uti et *Delphinus* quidam mare, hocce promontorium ambiens, inhabitare ab auctoribus perhibentur; mihi vero non satis perspecta sunt, vel examinata haec animalia oceanica.

Ex hisce jam enumeratis Mammalium speciebus 59, praeter capita Myrmecophagae *capensis*, Hippopotami *amphibii* et Bovis *caffri*, species 33 inveniuntur in Musaeo Upsaliensi, quarum pelles in Africa collectas in Europam attuli, quaeque jam praeparatae et farctae, ut a studiosa juventute academica rite et facile cognoscantur, in Lectionibus publicis ostenduntur, scilicet: Simia *sphinx* ♂ et ♀, *sabaea*; Canis *aureus* et *mesomelus*; Felis *Leo* ♂ et ♀, *pardus*, *jubata*, *capensis*, *chaus* ♂ et ♀, *Caracal*; Viverra *ichneumon*, *grisea*, *barbara*, *tigrina*, *felina*, *Zorilla*; Meles *mellivora*; Hyrax *capensis*; Arctomys *maritimus*, *capensis*;

Hystrix *crystata;* Antilope *Oryx, leucophaea, Oreas, Eleotragus* ♂, *monticola* ♂, *sylvatica, maculata, pygarga, dorcas, Strepsiceros* cum pullo; Bos *gnu;* Equus *Zebra* cum pullo.

Reliquas species, quas videre et examini subjicere licuit, vel obtinere non potui, ob raritatem, ut *Giraffam;* vel ob ingentem molem non adferre, ut *Hippopotamum, Bovem* Caffrum, *Elephantem, Suem* aethiopicum, *Rhinocerotem* et *Quaggam;* vel pelles reliquarum in Hollandiam transmisi.

Narrat quidem illustris peregrinator, Dominus *Vaillant,* se in regionibus dissitis Namaquensibus vidisse Equi quandam speciem, citissime aufugientem; sed cum valde sit incertum, utrum haec fuerit vel Equus Hemionus, vel species forsan nova, nihil certi de illa determinari potest.

Neque mihi contigit videre Murem *pumilionem,* quem memorat Dominus Professor *Sparrman,* quemque descripsit et delineavit in Actis novis Stockholmensibus, 1884. p. 237. Tab. 6. Paucioribus suis lineis dorsalibus albis, uti et magnitudine minori a Mure *barbaro* omnino diversus videtur.

EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

FAITES À ST. PÉTERSBOURG ANNÉE MDCCCIII, D'APRÈS LE VIEUX STILE †,

PAR

FEU MR. INOCHODZOW,

REDIGÉ PAR

BASILE PETROW.

Présenté à la Conférence le 17 Janv. 1810.

† Voyez Tom. II. page 224. des Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg.

I. Baromètre.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a été au dessus de 28 *pouces de Paris*.

NB. m. signifie matin ou avant midi; à m. signifie à midi; après m. ou apr. m. signifie après midi; et s. signifie soir.

Mois	Hauteurs les plus grandes		Hauteurs les plus petites,		leur variation,	leur milieu arithmétique,	hauteur moyenne,	hauteurs au dessus de 28 pouces.
	pouces	jours	pouces	jours	pouces	pouces	pouces	jours
Janv.	28,92	le 12 s. et le 13 m.	27,87	le 22 soir	1,05	28,395	28,323	28
Févr.	28,73	le 1 matin	26,87	le 16 matin	1,86	27,80	28,08	14
Mars	28,78	le 10 soir	27,46	le 5 matin	1,32	28,120	28,24	26
Avr.	28,40	le 23 matin	27,28	le 9 matin	1,12	27,840	27,96	12
Mai	28,52	le 9 apr. m.	27,69	le 19 soir	0,83	28,105	28,052	14
Juin	28,50	le 27 soir	27,69	le 8 matin	0,81	28,095	28,118	21
Juill.	28,47	le 31 apr. m.	27,73	le 12 matin	0,74	28,10	28,088	22
Août	28,50	le 1 apr. m.	27,55	le 31 matin	0,95	28,025	28,055	23
Sept.	28,67	le 18 apr. m.	26,99	le 29 matin	1,68	27,830	28,099	18
Oct.	28,48	le 24 apr. m.	27,50	le 6 s. et le 7 m.	0,98	27,990	28,049	19
Nov.	28,50	le 29 apr. m.	27,32	le 13 apr. m.	1,18	27,910	27,974	14
Déc.	28,75	le 11 soir	27,67	le 30 apr. m.	1,08	28,210	28,227	27
A.	28,92	le 12 et le 13 Janv.	26,87	le 16 Févr.	2,05	27,895	28,105	238
H.	28,92	le 12 et le 13 Janv.	26,87	le 16 Févr.	2,05	27,895	27,871	96
E.	28,67	le 18 Sept.	26,99	le 29 Sept.	1,68	27,830	28,077	117

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1803, comprenant les 365 jours de l'année.

H. marque l'intervalle de six mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1802 jusqu'au 1 Mai 1803, comprenant 181 jours.

E. marque l'intervalle de six mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1803, comprenant 184 jours.

Le tableau précédent fait voir: 1) que la variation totale du baromètre a été la plus grande (de 1,86 pouce) en Février, et la plus petite (de 0,74 pouce) en Juillet; 2) que la hauteur moyenne du baromètre se trouve être la plus grande (de 28,323 pouces) en Janvier, et la plus petite (de 27,96 pouces) en Avril.

II. Thermomètre de *Mr. Délisle.*

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leurs différences, milieu arithmétique, et températures moyennes pendant les matins et les soirs, bientôt après midi et pour chaque mois entier de l'année 1803.

Mois	Temperatures extremes, les plus basses, degrés	les plus basses, jours	les plus hautes, degrés	les plus hautes, jours	leurs différences, degrés	leur milieu arithmétique, degrés	Temperatures moyennes, les matins et les soirs, degrés	bientôt après midi, degrés	de chaque mois entier, degrés
Janv.	199	le 26 m.	163,5	le 9 apr. m.	35,5	181,25	180	178	179,1
Févr.	177,6	le 1 matin	151,9	le 15 soir et 28 après midi	25,7	164,75	162,7	159,5	161,6
Mars	186,6	le 3 matin	128	le 30 apr. m.	58,6	157,3	151,2	145,9	149,4
Avr.	153,4	le 11 m.	114	le 29 apr. m.	39,4	133,7	141,7	135,8	140
Mai	141	le 1 matin	114,2	le 6 apr. m.	26,8	127,6	132	125	129,8
Juin	136,2	le 17 m.	103,1	le 25 apr. m.	33,1	119,65	127,7	120,5	125,2
Juill.	133,1	le 13 et 19 m.	105,2	le 23 apr. m.	27,9	119,15	130,6	124,5	128,5
Août	138,4	le 31 m.	111,6	le 12 et 16 après midi	26,8	125	128,4	121,3	126,1
Sept.	150	le 30 m.	124,4	le 5 apr. m.	25,6	137,2	139,8	134,8	138
Oct.	158	le 29 m.	136,9	le 16 apr. m.	21,1	147,45	149,1	147,2	148,3
Nov.	184	le 21 soir	148,3	le 8 soir	35,7	166,15	161,5	160,3	161
Déc.	193,8	le 15 m.	157,5	le 24 soir	36,3	175,65	173,9	172,5	173,4
A.	199	le 26 Janv.	103,1	le 25 Juin	95,9	151,05	148,2	143,77	146,7
H.	199	le 26 Janv.	114	le 29 Avr.	85	156,5	157,74	154,52	157,38
E.	158	le 29 Oct.	103,1	le 25 Juin	54,9	130,55	134,6	128,88	132,65

On voit par ce tableau: 1) que le plus grand froid (de 199 degrés) a été le 26 Janvier matin; 2) que la plus grande chaleur (de 103,1 degrés) est arrivée le 25 Juin après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute températures de l'atmosphère fut (de 58,6 degrés) en Mars, et la plus petite (de 21,1 degrés) en Octobre; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 180 degrés) en Janvier, et la plus haute (de 127,7) degrés) en Juin; 5) que bientôt après midi la température moyenne la plus basse (de 178 degrés) a été aussi en Janvier, et la plus haute (de 120,5 degrés) de même au mois de Juin.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et soirs et bientôt après midi de chaque mois, tant au dessous qu'au dessus de quelques divisions principales du thermomètre *de Mr. Délisle.*

Mois	Les matins et les soirs la température a été plus basse que					Après midi la température a été plus haute que				
	190°	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	5	19	27	31	31					
Févr.			7	18	28					
Mars		1	2	5	17	22	6	1		
Avr.					6	30	16	9	3	
Mai						31	31	25	6	
Juin						30	30	26	10	6
Juill.						31	31	31	12	2
Août						31	31	27	15	
Sept.					1	30	27	4		
Oct.					15	22	2			
Nov.		1	8	17	30	3				
Déc.	3	11	22	31	31					
A.	8	32	66	102	159	230	174	123	46	8
H.	5	32	60	89	140	63	22	10	3	
E.					16	175	152	113	43	8

3) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs et bientôt

après midi de chaque mois, tant au dessous qu'au dessus et entre quelques divisions principales du thermomètre *de Mr. Délisle.*

Mois	Les matins et les soirs la température a été						Après midi la température a été					
	au dessous de 190°	entre 190° et 180°	entre 180° et 170°	entre 170° et 160°	entre 160° et 150°	au dessous de 150°	au dessus de 150°	entre 150° et 140°	entre 140° et 130°	entre 130° et 120°	entre 120° et 110°	au dessus de 110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	5	14	8	4		31						
Févr.			7	11	10	28						
Mars		1	1	3	12	17	22	16	5	1		
Avr.					6	6	30	14	7	6	3	
Mai							31		6	19	6	
Juin							30		4	16	4	6
Juill.							31			19	10	2
Août							31		4	12	15	
Sept.					1	1	30	3	23	4		
Oct.					15	15	22	20	2			
Nov.		1	7	9	13	30	3					
Déc.	3	8	11	9		31						
A.	8	24	34	36	57	159	230	53	51	77	38	8
H.	5	27	28	29	51	140	63	41	12	7	3	
E.					16	16	175	23	39	70	35	8

Il a commencé à geler le 19 Septembre 1802, et il a gelé pour la dernière fois le 15 Avril 1803, après un intervalle de 208 jours. En A. et notamment en E., où il a gelé pour la dernière fois le 15 Avril, il a recommencé à geler le 30 Septembre, après un intervalle de 167 jours.

Il a gelé, les matins et les soirs, en A. 159 jours, en H. 140 jours et en E. 16 jours.

Il n'a gelé point du tout, à midi ou bientôt après midi, en A. 230 jours, en H. 63 jours et en E. 175 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glaces pendant 153 jours, debacla le 30 Mars matin. Le 5 Novembre elle se couvrit de nouvelles glaces, ayant été ouverte pendant 220 jours.

III. Vents.

Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'an. 1803.

Mois	calme,	La force des vents,			Rapport de la direction des vents,			
		vent médiocre,	vent fort,	vent très-fort,	Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier	5	18	7	1	6	12		13
Février	4	19	5		3	4	8	13
Mars	7	18	6		6	2	2	21
Avril	4	21	5		2	3	9	16
Mai	2	19	10		6	5	5	15
Juin	1	21	8		3	4	5	18
Juillet	1	19	11		7	3	6	15
Août	1	22	8		5	4	13	9
Septembre	3	19	7	1	4	3	12	11
Octobre	1	22	8		9	4	2	16
Novembre	2	23	5		2	14	9	5
Décembre	1	25	5		2	7	11	11
A.	32	246	85	2	55	65	82	163
H.	31	116	32	2	23	43	29	86
E.	9	122	52	1	34	23	43	84

Ce tableau indique : 1) que les mois de Mai et de Juillet ont été les plus venteux ; ceux de Mars, d'Avril, de Novembre et de Décembre les plus calmes ; 2) que l'hiver (H.) a été un peu plus venteux, que l'été (E.), qui l'a suivi dans le rapport de 9 + 122 : 31 + 116, ou de 131 : 147.

Le vent dominant était dans toute l'année celui de l'Ouest. Le vent de l'Est se fit sentir le plus aux mois de Janvier et de Novembre ; le vent du Sud regnait le plus en Août, Septembre et Décembre.

IV. L'état de l'atmosphère.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gélée blanche	neige	parhélies	parasélène
	serein	nuages	couvert									
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	10	11	10	8						14	1	1
Févr.	3	9	16	5						15		
Mars	13	12	6	6	3			1		7		
Avr.	4	15	11	5	13	2	2	1	1	6		
Mai	6	19	6	1	12	1	2	1				
Juin	12	12	6		11	1	1					
Juill.	6	16	9	3	15	4	6	3				
Août	7	17	7		11	1	2	2				
Sept.	8	9	13	4	16	3			4	2		
Oct.	1	19	11	4	5				2	11		
Nov.	1	11	18	6						15	1	
Déc.	7	9	15	5						16		
A.	78	159	128	47	86	12	13	8	7	86	2	1
H.	36	68	77	38	19	2	2	2	1	66	1	1
E.	40	92	52	12	70	10	11	6	6	13		

On voit par l'inspection de ce tableau : 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Janvier, Mars et Juin ; en Octobre on n'en a compté qu'un seul et qu'en Novembre aussi un seul jour serein ; 2) qu'il y en a eu en été (E.) un peu plus qu'en hiver (H.) ; 3) qu'on a observé 47 jours de brouillards cette année-ci, tandis que l'année passée on en a compté 38.

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois le 17 Avril, et pour la première fois le 29 Septembre, après un intervalle de 164 jours.

Il tonna pour la première fois le 26 d'Avril, et pour la dernière fois le 16 d'Août.

Enfin, tous les deux parhélies, observées cette année-ci, ont été des colonnes autour du soleil de couleurs de celles de l'arc-en-ciel.



EXTRAIT DES OBSERVATIONS MÉTÉOROLOGIQUES,

FAITES À ST. PÉTERSBOURG ANNÉE MDCCCIV, D'APRÈS LE VIEUX STILE †,

PAR

FEU MR. INOCHODZOW,

REDIGÉ PAR

BASILE PETROW.

Présenté à la Conférence le 26 Sept. 1810.

† Voyez Tom. II. page 224. des Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg.

I. Baromètre.

Hauteurs extrêmes, variation, milieu arithmétique, hauteur moyenne et nombre des jours, auxquels la hauteur du Baromètre a été au dessus de 28 *pouces de Paris.*

NB. m. signifie matin ou avant midi; à m. signifie à midi; après m. ou apr. m. signifie après midi; et s. signifie soir.

Mois	Hauteurs les plus grandes,		Hauteurs les plus petites,		leur variation,	leur milieu arithmétique,	hauteur moyenne,	hauteurs au dessus de 28 pouces,
	pouces	jours	pouces	jours	pouces	pouces	pouces	jours
Janv.	28,49	le 14 et le 19 après midi	27,09	le 1 apr. m.	1,40	27,79	27,92	12
Févr.	28,98	le 19 soir	27,15	le 11 matin	1,83	28,065	28,357	22
Mars	28,84	le 28 soir	27,59	le 21 apr. m.	1,25	28,215	28,112	18
Avr.	28,61	le 25 matin	27,64	le 30 apr. m. et s.	0,97	28,125	28,206	26
Mai	28,55	le 1 s. et le 12 m.	27,61	le 1 matin	0,94	28,08	28,15	24
Juin	28,54	le 1 m. et apr. m.	27,56	le 10 apr. m.	0,98	28,05	28,003	12
Juill.	28,48	le 18 m. et s.	27,65	le 11 apr. m.	0,83	28,065	28,157	22
Août	28,51	le 24 apr. m.	27,54	le 6 apr. m.	0,97	28,025	28,091	19
Sept.	28,46	le 5 apr. m.	27,25	le 10 matin	1,21	27,855	27,878	21
Oct.	28,87	le 23 m. et s.	27,42	le 31 matin	1,45	28,145	28,387	28
Nov.	28,74	le 27 soir	27,57	le 12 matin	1,17	28,155	28,099	16
Déc.	28,57	le 13 m. et s.	27,46	le 20 apr. m.	1,11	28,015	28,196	26
A.	28,98	le 19 Févr.	27,09	le 1 Janv.	1,89	28,035	28,13	246
H.	28,98	le 19 Févr.	27,09	le 1 Janv.	1,89	28,035	28,132	119
E.	28,87	le 23 Oct.	27,25	le 10 Sept.	1,62	28,060	28,111	126

A. marque l'intervalle de toute l'année depuis le 1 Janvier jusqu'au 31 Décembre 1804, comprenant les 366 jours de l'année.

H. signifie l'intervalle de six mois d'hiver depuis le 1 Novembre 1803 jusqu'au 1 Mai 1804, comprenant 182 jours.

E. marque l'intervalle de six mois d'été depuis le 1 Mai jusqu'au 1 Novembre 1804, comprenant 184 jours.

La table précédente indique : 1) que la variation totale du baromètre a été la plus grande (de 1,83 pouce) en Février, et la plus petite (de 0,83 pouce) en Juillet; 2) que la hauteur moyenne du baromètre se trouve être la plus grande (de 28,387 pouces) en Octobre, et la plus petite (de 27,878 pouces) en Septembre.

II. Thermomètre de *Mr. Délisle.*

1) Températures extrêmes de l'atmosphère avec leurs différences, milieu arithmétique, et températures moyennes pendant les matins et les soirs, bientôt après midi et pour chaque mois entier de l'année 1804.

Mois	Températures extrêmes				leurs différences,	leur milieu arithmétique,	Températures moyennes		
	les plus basses,		les plus hautes,				les matins et les soirs,	bientôt apres midi,	de chaque mois entier
	degrés	jours	degrés	jours	degrés	degrés	degrés	degrés	degrés
Janv.	191,8	le 31 m.	145,7	le 13 matin	46,1	168,7	164,5	162,5	163,5
Févr.	177,6	le 27 m.	154,5	le 23 apr.m.	23,1	166	168,3	159,8	163,1
Mars	187,8	le 9 matin	139	le 31 apr.m.	48,8	163,4	159,5	153,3	157,4
Avr.	161,2	le 5 matin	119,6	le 22 apr.m.	41,6	140,4	143,7	135,9	141,1
Mai	146,2	le 3 matin	111,6	le 15 apr.m.	34,6	128,9	134	123	131,3
Juin	140	le 20 m.	110,6	le 29 apr.m.	29,4	125,3	128,9	121,9	126,6
Juill.	131,3	le 29 et 30 m.	105	le 17 et 21 après midi	26,3	118,1	120,8	113,3	118,3
Août	140,4	le 28 m.	112,5	le 3 apr. m.	27,9	126,4	126,2	121,5	128,8
Sept.	151,9	le 20 m.	119	le 11 apr.m.	32,9	135,4	139,4	129,7	136,2
Oct.	168	le 28 m.	128	le 4 apr. m.	40	148	150,6	145,5	148,8
Nov.	190,4	le 30 soir	143	le 7 apr. m.	47,4	166,7	165,2	159,3	163,6
Déc.	196	le 18 m.	148,1	le 28 apr.m.	47,9	172	169,1	166,3	168,2
A.	196	le 18 Déc.	105	le 17 et le 21 Juillet	91	150,5	147,5	140,99	145,57
H.	193,8	le 15 Décemb. [illegible]	119,6	le 22 Avr.	74,2	156,7	161,73	157,4	159,91
E.	168	le 28 Oct.	105	le 17 et le 21 Juillet	63	136,5	133,31	125,8	131,66

Ce tableau fait voir: 1) que le plus grand froid (de 196 degrés) fut le 18 Décembre matin; 2) que la plus grande chaleur (de 105 degrés) a été le 17 et le 21 Juillet après midi; 3) que la plus grande différence entre la plus basse et la plus haute températures de l'atmosphère a été (de 48,8 degrés) en Mars, et la plus petite (de 23,1 degrés) en Février; 4) que la température moyenne, pendant les matins et les soirs, se trouve être la plus basse (de 169,1 degrés) en Décembre, et la plus haute (de 120,8 degrés) en Juillet; 5) que bientôt après midi la température moyenne la plus basse (de 166,3 degrés) a été aussi en Décembre, et la plus haute (de 113,3 degrés) de même en Juillet.

2) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs et bientôt après midi de chaque mois, tant au dessous qu'au dessus de quelques divisions principales du thermomètre *de Mr. Délisle.*

Mois	Les matins et les soirs la température a été plus basse que					Après midi la température a été plus haute que				
	190°	180°	170°	160°	150°	150°	140°	130°	120°	110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	3	8	13	16	25	5				
Févr.			9	28	29					
Mars		4	9	14	31	17	1			
Avr.				1	8	29	17	7	1	
Mai						31	31	19	7	
Juin						30	30	27	13	
Juill.						31	31	31	27	9
Août						31	31	31	13	
Sept.					2	30	28	14	1	
Oct.				4	18	21	8	2		
Nov.	1	3	12	20	30	4				
Déc.	4	9	17	25	31	2				
A.	8	24	60	108	174	231	177	131	62	9
H.	6	24	61	107	154	54	18	7	1	
E.				4	20	174	159	124	61	9

3) Nombre des jours, auxquels la température de l'atmosphère a été, pendant les matins et les soirs et bientôt

après midi de chaque mois, tant au dessous qu'au dessus et entre quelques divisions principales du thermomètre *de Mr. Délisle.*

Mois	Les matins et les soirs la température a été						Après midi la température a été					
	au dessous de 190°	entre 190° et 180°	entre 180° et 170°	entre 170° et 160°	entre 160° et 150°	au dessous de 150°	au dessus de 150°	entre 150° et 140°	entre 140° et 130°	entre 130° et 120°	entre 120° et 110°	au dessus de 110°
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	3	5	5	3	9	25	5					
Févr.			9	19	1	29						
Mars		4	5	5	17	31	17	16	1			
Avr.				1	7	8	29	12	10	6	1	
Mai							31		12	12	7	
Juin							30		3	14	13	
Juill.							31			4	18	9
Août							31			18	13	
Sept.						2	30	2	14	13	1	
Oct.				4	14	18	21	13	6	2		
Nov.	1	2	9	8	10	30	4	4				
Déc.	4	5	8	8	6	31	2	2				
A.	8	16	36	48	64	174	231	49	46	69	53	9
H.	6	18	37	46	47	154	54	28	11	6	1	
E.				4	14	20	174	15	35	63	52	9

Il a commencé à geler le 30 Septembre 1803, et il a gelé pour la dernière fois le 13 Avril 1804, après un intervalle de 197 jours. En A. et notamment en E., où il avait gelé pour la dernière fois le 13 Avril, il a recommencé à geler le 19 Septembre 1804, après un intervalle de 158 jours.

Il a gelé, pendant les matins et les soirs, en A. 174 jours, en H. 154 jours et en E. 20 jours. Il n'a gelé point du tout, à midi ou bientôt après midi, en A. 231 jours, en H. 54 jours et en E. 174 jours.

La rivière Newa, après avoir été couverte de glaces pendant 153 jours, debacla le 14 Avril. Le 28 Octobre elle se couvrit de nouvelles glaces, après avoir été ouverte pendant 197 jours.

III. Vents.

Tableau général de la force et de la direction des vents pour chaque mois de l'an. 1804.

Mois	calme,	La force des vents,			Rapport de la direction des vents,			
		vent médiocre,	vent fort,	vent très-fort,	Nord	Est	Sud	Ouest
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janvier		25	4	2	3	6	12	10
Février	2	22	4	1	5	9	9	6
Mars	4	26	1		7	9	4	11
Avril	5	21	4		2	9	7	12
Mai	3	17	11		1	6	9	15
Juin	4	23	3		7	11	4	8
Juillet	5	24	2		7	13	6	5
Août	1	22	8		4	3	7	17
Septembre	2	15	13		6		9	15
Octobre	2	23	6		3	9	11	8
Novembre	2	20	6	2	6	2	9	13
Décembre	2	20	8	1	2	1	5	23
A.	32	258	70	6	53	78	92	143
H.	14	142	23	3	21	54	52	55
E.	17	124	43	.	28	42	46	68

On voit par l'inspection de ce tableau: 1) que les mois de Mai, de Septembre, de Novembre et de Décembre ont

été les plus venteux que les autres; 2) que l'été (E.) a été un peu plus calme que l'hiver (H.), qui l'a suivi dans le rapport de 14 + 142 : 17 + 124, ou de 156 : 141 3) que le vent dominant a été dans l'année celui de l'Ouest.

IV. L'état de l'atmosphère.

Mois	Ciel			brouillard	pluie	l'arc-en-ciel	tonnerre et éclaire	grêle	gelée blanche	neige	parhélies	parasélènes
	serein	nuages	couvert									
	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours	jours
Janv.	2	13	16	7	3					19	2	
Févr.	10	11	8	2						12		
Mars	11	9	11	6	3			1		9	1	
Avr.	9	16	5	6	9					2		
Mai	8	15	8	3	12		2	2		1		
Juin	8	14	8	1	13	2						
Juill.	14	13	4	3	7	1	3					
Août	5	15	11	8	14	5	1					
Sept.	5	17	8	5	9	2		2	6			
Oct.	3	11	17	5	3				3	9		
Nov.	9	7	14	4						14		1
Déc.	4	10	17	5						13	1	1
A.	88	151	127	55	73	10	6	5	9	79	4	2
H.	40	69	73	32	15			1		73	4	
E.	43	85	56	25	58	10	6	4	9	10		

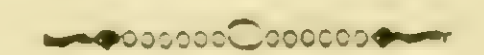
Ce tableau fait voir: 1) que le nombre des jours entièrement sereins a été le plus grand en Février, Mars et Juillet; 2) qu'en Janvier on n'en a compté que deux, et en Octobre trois jours sereins; 3) qu'en hiver (H.) il y en avait presqu'autant qu'en été (E.).

Cette année-ci il neigea pour la dernière fois le 2 Mars, et pour la première fois le 12 Octobre, après un intervalle de 163 jours.

Il tonna pour la première fois le 16 Mai, et pour la dernière fois le 3 Août.

Cette année-ci on a observé quatre parhélies, qui ont été des colonnes autour du soleil de couleurs semblables à celles de l'arc-en-ciel.

Quant aux aurores boréales, elles ont été observées trois fois, et notamment: le 26 Août, le 10 Octobre et le 20 Décembre.



III.
SECTION
DES
SCIENCES POLITIQUES.

DES CHOSES QUI SONT SUSCEPTIBLES D'AVOIR DE LA VALEUR. ANALYSE DES DIFFÉRENTES ESPÈCES DE BIENS.

PAR

HENRY STORCH.

Présenté à la Conférence le 18 Oct. 1809.

Toutes les choses indistinctement peuvent avoir une valeur directe, mais elles ne sont pas également susceptibles d'avoir une valeur échangeable. Nous avons vu que l'opinion ne peut attribuer cette valeur qu'aux choses qui ont la faculté de pouvoir s'échanger : or cette faculté n'est propre qu'aux *êtres matériels* et au *travail*. Les choses matérielles peuvent s'échanger contre d'autres choses matérielles ou contre du travail; le travail peut s'échanger contre du travail ou contre des choses matérielles.

Les *choses matérielles* n'ont pas toutes également cette faculté. Celles qui ne sont pas de nature à pouvoir être possédées ou transmises, telles que la lumière, l'air, etc.

ne se prêtent point aux échanges, non plus que les propriétés des choses échangeables, quoique ces dernières influent toujours sur la valeur échangeable des choses auxquelles elles appartiennent. Les dispositions physiques et morales de l'homme influent nécessairement sur la valeur de son travail. Une terre qu'on achète pour la cultiver, se vendra peut-être plus cher à cause du beau site. Ainsi la classe des choses matérielles susceptibles d'avoir une valeur échangeable se borne à la terre et à ses productions, tant naturelles que sollicitées ou transformées par le travail de l'homme.

Le *travail* ne devient pas seulement échangeable lorsqu'il se fixe dans des choses matérielles : il a cette faculté par lui-même, puisqu'il la conserve lors même qu'il ne se fixe dans aucun objet matériel, et puisqu'un pareil travail immatériel peut s'échanger contre un autre travail du même genre ; le travail d'un musicien, par exemple, contre celui d'un avocat. Mais avant d'aller plus loin, tâchons de préciser l'idée qu'il faut attacher au terme de travail, et distinguons ces différentes espèces.

Le travail est l'activité des facultés humaines dirigée vers un but utile. Les actions des hommes qui n'ont point en vue un résultat utile, ne méritent point d'être appellées travaux. Mais le travail peut atteindre son

but, il peut aussi le manquer, selon que l'opinion reconnoit ou non une valeur à son produit. S'il atteint son but, il est *productif*, puisqu'alors il produit nécessairement une valeur; s'il manque son but, il est inutile ou *improductif*, puisqu'alors il ne produit point de valeur. Le travail qui s'exerce sur des choses matérielles, dans la vue de leur procurer une valeur ou d'augmenter celle qu'elles ont, est appellé *matériel* ou *industriel*; tous les autres genres de travail peuvent être désignés sous le nom de travail *immatériel*.

Au reste, il s'entend que l'un et l'autre peuvent être productifs en valeurs directes comme en valeurs échangeables. L'étude que je fais d'une langue ou d'une science, est un travail immatériel, dont le produit n'a qu'une valeur directe pour moi; les leçons que donne un professeur, sont un pareil travail, mais dont le produit a une valeur échangeable. L'artisan qui invente un instrument dont lui seul sait se servir, fait un travail matériel dont le produit n'a qu'une valeur directe; les produits de son industrie qu'il expose en vente à la suite d'une demande, ont une valeur échangeable.

Parmi les choses qui peuvent avoir une valeur échangeable, il importe de distinguer celles qui sont durables et susceptibles d'accumulation, de celles qui ne sont que

transitoires, et qui, par conséquent, ne peuvent point s'accumuler. Ce point de différence est si essentiel, que c'est lui seul auquel il faut rapporter l'origine de toute propriété mobiliaire et de toute richesse. L'idée de propriété est inséparable de l'idée de durée, et la richesse ne se forme que du surplus qui reste au-delà de la consommation, c'est-à-dire, de provisions accumulées; or, on ne peut accumuler que des choses durables.

Ainsi toutes les choses ayant de la valeur, se divisent en deux classes: 1°. celles qui ont une valeur directe: ce sont les *biens* proprement dits; et 2°. celles qui ont une valeur échangeable. Ces dernières se rangent sous deux espèces: les unes, durables et susceptibles d'accumulation, comprennent les choses matérielles et les produits du travail matériel: on les appelle *richesses;* les autres, transitoires et non-susceptibles d'accumulation, se composent des produits du travail immatériel: nous les nommons *services.*

Ces notions simples et claires ont été de tout tems reconnues par le bon sens; ce n'est que la fureur d'établir des systèmes, qui, en substituant des idées confuses aux mots les plus intelligibles, en a fait perdre la véritable signification. Tout le monde sait qu'on a fait consister les richesses tantôt dans le numéraire, tantôt dans

les produits bruts de la nature : il a fallu toute la logique de *Smith* pour rétablir le sens propre d'un mot qui est dans la bouche de tout le monde. Si le philosophe anglais a négligé d'en donner une définition en termes clairs et précis, celle que nous venons d'énoncer n'en est pas moins le résultat de sa théorie; aussi se sert-il constamment dans tout le cours de son ouvrage des expressions de *vivres*, de *matières* et *d'ouvrage fait* comme équivalentes au mot de richesses. S'il n'appelle *productif* que le seul travail matériel, c'est qu'il ne s'occupe que des richesses; car assurément il n'auroit jamais nié que le travail immatériel ne puisse être productif en services, et que l'un et l'autre de ces deux genres de travaux ne puissent l'être en biens. Le seul reproche auquel il se soit exposé, c'est de n'avoir pas distingué ces notions de biens, de richesses et de services. Aussi, combien n'a-t-il pas essuyé d'injustes critiques, faute d'avoir négligé cette précaution! Les uns se sont recriés contre une classification de travaux qui rangeoit sous la même cathégorie les rois et les mendians, les classes les plus respectables et les plus viles de la société. D'autres ont trouvé absurde de qualifier d'inutiles ou d'improductifs les travaux les plus importans pour l'humanité, tels que ceux des fonctionnaires publics, des savans etc. Les personnes

qui distinguent comme nous le travail humain d'après la durée de son produit, n'élèveront plus ces objections puériles. Elles savent que les mendians ne travaillent pas du tout, que le travail des fonctionnaires publics et des savans est productif en services, et que ces services sont aussi nécessaires à la société que le sont les richesses, mais que ce n'est pas une raison pour confondre les uns avec les autres.

Telle est cependant la tâche de plusieurs auteurs estimables qui ont écrit depuis *Smith* sur l'économie politique. L'autorité réunie de *Garnier*, de *Say*, du lord *Lauderdale* et de *Hufeland* semble anéantir la distinction entre les richesses et les services que nous maintenons. Voici en substance leur raisonnement.

Tout ce qui a une valeur échangeable, disent-ils, ou en d'autres termes, tout ce qui est demandé et produit pour être consommé, appartient à la même classe et peut être appellé du même nom. Les produits immatériels du travail et ses produits matériels ont les uns et les autres une valeur échangeable. La seule différence qui se trouve entre ces deux genres de produits, c'est que les uns n'ont point de durée et sont consommés à mesure qu'ils sont produits; au lieu que les autres, étant durables, ne sont pas nécessairement consommés dans l'in-

stant. Cette différence est trop légère pour fournir un principe de division applicable à des travaux qui ont la même origine, la même tendance et les mêmes effets pour la société. Les besoins de l'homme social, voilà le seul point de vue d'où il faut les considérer; et sous ce point de vue tous les travaux étant également utiles et indispensables, leurs produits doivent être considérés comme étant de la même nature. Au reste, comme les degrés de durée varient à l'infini dans les produits matériels, il y a un nombre immense de ces produits, qui, sous ce rapport, se confondent presqu'entièrement avec les produits immatériels, tels que les denrées qui ne sont pas de garde, la viande, les fruits, les fleurs, les mets préparés etc. Ces produits matériels susceptibles de fort peu de durée, ont le même effet sur la richesse nationale que les produits immatériels: la somme de leur consommation égale à-peu-près celle de leur production. Une nation qui ne produiroit que des denrées périssables, se trouveroit à la fin de l'année à-peu-près dans la même situation qu'une nation qui n'auroit produit que des spectacles ou des leçons. L'une pourroit être une nation bien nourrie, l'autre une nation bien divertie ou bien endoctrinée; mais la richesse nationale n'y auroit rien gagné.

Telles sont en substance les raisons qu'on fait valoir pour confondre les deux genres de travaux dont nous maintenons la distinction. Avant d'y répondre, voyons à quelles conséquences elles ont entrainés leurs auteurs.

Garnier, en admettant que le travail immatériel est productif, dans le sens de *Smith*, en conclut qu'il est aussi avantageux à une nation de le multiplier que tout autre *).

Say donne le nom de richesses à toutes les choses qui ont une valeur échangeable. Cependant il convient que les richesses immatérielles ne servent point à augmenter le capital national; qu'au contraire, en augmentant ce genre de travail productif, on en augmente en même tems la consommation. Le travail immatériel, ajoute-t-il, n'est productif que jusqu'au point où ce produit est utile; au-delà de ces point, c'est un travail purement improductif. Les produits des travaux immatériels sont consommés à mesure: ce que ceux qui les produisent accumulent, provient de la production matérielle des autres citoyens **).

Le lord *Lauderdale*, afin de rendre ridicule la distinc-

---

*) Traduct. de *Smith*, note 20.

**) Traité d'Econ. polit. Liv. I. ch. 42. Liv. IV. ch. 3.

tion du travail productif et du travail improductif, telle que *Smith* l'avait établie, s'applique à confondre les valeurs *nécessairement* consommées en même tems que produites, avec celles qui ne le sont pas. „Si mon cuisinier fait une tarte, dit-il, que je mange sur le champ, c'est un ouvrier non-productif; si le même travail se fait dans la boutique d'un pâtissier, dès-lors il devient productif. Ainsi, une tarte placée dans une boutique, est une richesse, et une tarte faite chez moi ne l'est pas.“ Cette mauvaise plaisanterie ne mérite aucune réponse. Mais ce qu'il importe de rélever, ce sont les contradictions dans lesquelles le lord tombe sans s'en appercevoir. En combattant la distinction de *Smith*, il paroît n'admettre aucune différence entre les produits matériels et immateriels. Aussi ne laisse-t-il aucun doute sur sa pensée, lorsqu'il définit la richesse publique par *tout ce que l'homme desire, comme lui étant utile ou agréable.* Néanmoins, dans plusieurs endroits de son ouvrage, il trouve que le seul moyen d'accroître la richesse, c'est l'emploi du travail et des capitaux dans l'agriculture et dans l'industrie manufacturière *).

Hufeland, pour éviter d'employer le terme de riches-

---

*) Recherches, Ch. II. p. 37. Ch. III. p. 109. Ch. V. p. 210. 267.

ses dans le sens ambigu où *Say* l'a pris, ne parle que de valeurs ou de *biens*. Il traite d'abord des biens en général, puis des *biens qui le sont pour plusieurs*, car c'est ainsi qu'il désigne les valeurs échangeables. Le mot *productif*, qui l'auroit gêné, est banni de sa théorie; tout travail, dans son sens, est productif, car il ne donne le nom de travail qu'à cette activité humaine qui se manifeste en fournissant des biens. Au reste, malgré la teinte d'originalité que porte son ouvrage, l'idée la plus saillante, celle de faire de la seule valeur l'objet de l'Économie politique, l'auteur la doit aux écrivains que nous venons de citer.

Quant à moi, loin de vouloir exclure les services du domaine de l'Économie politique, je trouve, au contraire, qu'on leur a donné trop peu d'attention. C'est pour les faire considérer sous tous les rapports dont ils sont susceptibles, que je prétends qu'il est indispensable de les considérer seuls. Elles forment l'objet d'une branche particulière de la science, et cette branche est encore à créer. La méthode qu'on a suivie jusqu'ici, n'y contribuera pas beaucoup.

Sans doute la valeur échangeable est un caractère commun aux richesses comme aux services: mais ce n'est que par ce caractère seul qu'ils se ressemblent; sous tous

les autres rapports ces deux espèces de produits sont absolument différens.

D'abord, je puis posséder les uns: je ne puis que jouir des autres. Le simple bon-sens suffit pour reconnoître la différence qu'il y a entre les personnes et les choses, entre la propriété morale qui fait partie de notre être, et la propriété mobiliaire qui se constitue de choses hors de nous.

Ensuite, les uns sont durables, ils s'accumulent et forment la richesse des particuliers comme celle des nations: les autres disparoissent au moment où ils sont produits, et ne laissent aucune trace matérielle après eux. Quelquefois, à la vérité, la ligne de démarcation qui sépare les choses durables des êtres qui n'ont point de durée, cette ligne, dis-je, est difficile à reconnoître: mais cela n'empêche pas qu'elle n'existe. Les produits immatériels sont *nécessairement* consommés au moment de leur production; les autres ne le sont pas; leur consommation peut être retardée jusqu'au moment où ils périssent, et quelque court que soit cet intervalle, il suffit pour faire naître plus d'un échange, au lieu que les produits immatériels ne peuvent jamais être échangés qu'une fois seulement. Au reste (qu'on me permette d'emprunter les paroles de *Simonde*) „de ce que les extrémités de deux

classes se touchent, en conclura-t-on qu'elles ne diffèrent point? Il a fallu toute l'habileté de *Trembley* pour reconnoître que les polypes étoient des animaux; *Vaucher* n'en déploie pas moins pour montrer que les conferves sont des plantes: en conclura-t-on qu'un chêne ne diffère point d'un cheval?.... Cet intervalle de tems entre la production et la consommation, qui est nul dans les produits immatériels, assés long et susceptible de se prolonger à volonté dans les produits matériels, et fort court dans quelques espèces équivoques, est la seule origine à laquelle on puisse rapporter la propriété mobiliaire. Le fruit du travail du musicien se dissipe à l'instant même; celui du travail du traiteur, du pâtissier, du cuisinier, se consomme au bout de peu d'heures: si les marchandises produites par le tisserand et le forgeron n'avoient pas plus de durée, il n'auroit pas valu la peine d'établir la distinction que nous maintenons; car dès l'instant que le fruit du travail est consommé, qu'il est appliqué à la jouissance, peu importe que ce travail se soit fait ou non.“ *)

Ce qui me paroît avoir surtout contribué à rendre moins sensible cette distinction, c'est le sens vague et in-

---

*) De la richesse commerciale, T. I. p. 33. note.

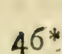
déterminé du mot *produit*, lorsqu'on l'applique aux fruits du travail immatériel. À proprement parler, ce ne sont nullement ces produits qui ont une valeur échangeable: c'est le travail qui les fournit; et voilà la raison pourquoi je les ai distinguées par le nom de *services*. Les fonctionnaires publics, les médecins, les acteurs, les domestiques d'un pays n'offrent point, en échange des produits matériels qu'ils reçoivent, une certaine portion de protection, de santé, de plaisir et de commodité: ils ne peuvent offrir que leurs *services* pour procurer ces biens à ceux qui les demandent.

Que ces biens soyent réellement produits ou non, ceci n'affecte en rien la valeur échangeable des services, car la demande aussi ne s'étend que sur ces services, quoiqu'elle ait toujours en vue les biens qui doivent en résulter. C'est pourquoi l'échange qui se fait entre l'avocat et le plaideur, entre le médecin et le malade, entre le maître et l'écolier, est toujours profitable à l'avocat, au médecin et au maître, supposé que leurs services leur rapportent le prix dont ils sont convenus avec les demandeurs: mais ceux-ci ne reçoivent pas toujours en retour la justice, la santé et l'instruction qu'ils attendoient de ces services lorsqu'ils en faisoient la demande. „L'industrie du médecin, demande *Say*, qui a visité un ma-

lade, a-t-elle été improductive? Qui pourroit le penser, répond-il; le malade a été sauvé.“ Mais s'il ne l'a pas été? Et dans le cas même où il a recouvré sa santé, comment décider s'il la doit aux conseils du médecin plutôt qu'au secours de la nature, qui peut même l'avoir sauvé en dépit des ordonnances du docteur? Ce n'est donc pas ainsi qu'il falloit répondre à la question. Oui, le travail du médecin a été productif, non parce qu'il a produit un bien, ce qui est très-susceptible d'être contesté; mais parce que l'opinion du malade lui a supposé cette valeur, et que le malade l'a réalisée en échangeant d'autres valeurs contre cette valeur supposée. S'il y a souvent perte pour les demandeurs dans les échanges de richesses contre des services, cet ordre de choses est une suite inévitable de la nature des travaux immatériels. Leur résultat est toujours plus ou moins incertain, et lors même qu'ils on ont, ce produit est encore d'une nature si contestable que l'opinion ne s'accorde presque jamais sur sa valeur. D'ailleurs, le défaut de durée de ces produits rend la perte irréparable, toutes les fois que l'opinion s'est trompée sur leur valeur. J'aime les arts. Je cherche un tableau et je vais au concert pour me procurer deux sensations agréables. Après avoir acheté l'un et entendu l'autre, je trouve que ces choses ne satisfont point à mon

goût. Le tableau me déplait, la musique me paroît détestable. L'un et l'autre ont perdu leur valeur directe à mes yeux: mais le tableau conserve une valeur échangeable, tandis que la musique ne me laisse pas même le souvenir d'avoir eu une valeur à mes yeux.

Ces observations me semblent prouver qu'il est important de distinguer le produit matériel du travail de son produit immatériel, et qu'on s'expose à des conséquences erronées en supposant l'un et l'autre sous l'influence des mêmes lois.



ANALYSE DES NOTIONS DE RICHESSE INDIVIDUELLE ET DE RICHESSE NATIONALE.

PAR

HENRY STORCH.

Présenté à la Conférence le 9 Mai 1810.

Toutes les richesses qu'une personne physique ou morale accumule au-delà de sa consommation actuelle, constituent sa *richesse* ou sa *fortune*.

On peut accumuler des richesses ou dans l'intention d'en jouir, d'en user et de les consommer, ou dans le dessein de les faire produire d'autres richesses. Une masse de richesses accumulée pour servir à la jouissance, à l'usage ou à la consommation, s'appelle *fonds de consommation;* une masse de richesses accumulée pour être employée à produire d'autres richesses, se nomme *capital.*

Ainsi la richesse des individus, comme celle des corporations et des nations, se compose de deux parties d'une nature tout-à-fait différente. Les *capitaux* durent autant que le possesseur veut les conserver, et ils donnent un revenu : les *fonds* n'en donnent point et se consomment ou périssent à mesure. Supposons un individu possédant

la valeur de deux-cent-mille roubles, la moitié en capitaux qui fructifient par son travail ou par celui d'un autre auquel il les prête, et l'autre moitié en fonds, p. e. en bâtimens, en jardins, en bijoux, en vaisselle, en meubles, en vêtemens et en provisions de bouche. Au moment où nous supposons sa fortune évaluée, la valeur de ses fonds est égale à celle de ses capitaux; mais au bout de la première année, les provisions de bouche sont consommées; les habits, le linge, le seront dans trois ou quatre ans; les meubles, les bâtimens, les jardins, à la vérité peuvent durer bien plus longtems, mais ils se détériorent et leur conservation exige des fraix, tandis que le capital non-seulement est intact au bout de plusieurs siècles, mais qu'il s'est encore grossi par les profits qu'il a donnés. Appliquons cet exemple à la richesse d'une nation, et nous verrons les mêmes résultats.

Cependant cette différence entre la nature des capitaux et celle des fonds n'est point une raison pour exclure ces derniers de l'évaluation qu'on fait de la richesse individuelle ou nationale. Le fonds de consommation de tout particulier riche et de toute nation opulente comprend une infinité de richesses susceptibles d'une fort longue durée; et celles mêmes qui n'en ont point, existent pourtant au moment de l'évaluation. En faisant le relevé

de la fortune d'un particulier, on n'oublie guère de tenir compte de la valeur de ses fonds: quelle raison y auroit-il d'en agir autrement lorsqu'on calcule la richesse d'une nation? Donc la richesse des individus comme celle des nations, se compose non-seulement des capitaux qu'ils possèdent, mais de la masse entière de richesses non-consommées dont ils peuvent disposer.

Les capitaux et les fonds d'un particulier ou d'une nation, considérés isolement, constituent leur *richesse absolue*. Sous ce point de vue, le plus mince excédant qui reste au pauvre, au-delà de sa consommation actuelle, est pour le moment sa richesse. Dans ce sens on peut parler de la richesse individuelle d'un mendiant, comme de la richesse nationale des peuples chasseurs dans les déserts de l'Amérique.

En considérant la fortune des individus ou des nations dans son rapport avec les autres circonstances essentielles qui déterminent le mode de leur existence sociale, on évalue leur *richesse relative*, et c'est de cette manière seulement qu'on parvient à s'en former des idées claires et susceptibles d'une application raisonnée. Pour la fortune des individus, ces rapprochemens ne présentent aucune difficulté: mais ceux de la richesse nationale supposent, quant aux faits, un grand nombre de données diffi-

ciles à découvrir ou à constater, et quant au raisonnement, dans celui qui entreprend cette recherche un esprit d'analyse et de combinaison qui ne se rencontre pas fréquemment.

Enfin, pour bien juger de la richesse d'une nation, il faut la *comparer* à celle des autres pays. Toutes nos idées sont relatives, et celle de la richesse l'est surtout. Les divers degrés d'opulence que les peuples civilisés ont atteint dans les différentes périodes de leur existence, forment une échelle, et c'est la seule d'après laquelle nous puissions mesurer l'état actuel de la richesse d'un pays. Mais en comparant la richesse absolue de deux nations, on n'obtient qu'un résultat isolé, vague, et dont il faut bien se garder de tirer des conclusions générales. La comparaison de la richesse relative, au contraire, nous fournit des résultats sûrs, lumineux, et qui ne laissent pas d'être fertiles en conséquences importantes pour ceux qui savent les trouver.

Il en est de la comparaison de la richesse nationale comme de celle de la population de différens pays: celle-ci de même ne présente qu'un résultat vague lorsqu'elle est faite sur la seule donnée du nombre d'habitans. Quand je sais que la Russie a 40 millions d'habitans, et que l'Autriche en a 23½, je ne puis comparer que la popula-

tion absolue des deux pays, et en tirer le résultat que le premier a presque le double du nombre d'habitans que renferme le second. Mais lorsque j'apprends que l'étendue de la Russie est de 310,000 miles géographiques quarrés, et celle de l'Autriche de 11,600, j'ai des données pour mesurer la population relative de ces pays. Je trouverai que celle de l'Autriche est de 2025 habitans par mile quarré, et celle de la Russie de 130; et j'en tirerai le résultat que la population relative de l'Autriche est 15 fois et demi plus forte que celle de la Russie. La première comparaison est celle de *l'étendue* de la population, la seconde celle de son *énergie*.

Cependant, ces données encore ne suffisent pas. La Russie étant un pays infiniment plus grand que l'Autriche, il est vraisemblable que la population de la première sera plus inégalement distribuée que celle de la seconde. Si je me contentois de la comparaison générale, je serois disposé à regarder la Russie comme un vaste désert, tandis que la comparaison particulière des différentes provinces de cet Empire avec celles de l'Autriche me fait voir que la Russie renferme des contrées aussi bien peuplées en raison de leur étendue que ne le sont la plupart des provinces de l'Autriche, tandis que d'autres contrées sont presqu'inhabitées. Ce n'est donc que par la comparaison

détaillée de la population relative des deux pays que je puis me former une idée vraie, complète et instructive du rapport de leur population.

La comporaison de la richesse nationale de deux pays exige les mêmes précautions, mais elle suppose bien plus de données et des données plus compliquées et plus difficiles à vérifier. L'état de la richesse absolue, ou l'évaluation des fonds et des capitaux, n'en est que la base: cependant, combien de recherches ne suppose-t-elle pas pour être portée à une évidence approximative, la seule dont par sa nature elle soit susceptible! Après l'avoir constatée, il s'agit de la considérer dans ses rapport avec la population: la combinaison de ces deux données fournit le principal moyen d'évaluer la richesse relative. Dans la comparaison, la richesse relative est toujours en raison inverse de la population. S'il étoit prouvé, comme nous le supposons pour le moment, que la richesse absolue de la France et celle de l'Angleterre fussent exactement les mêmes, il s'ensuivroit que la richesse relative de la première seroit inférieure à celle de la seconde, puisque la population de la France surpasse celle de l'Angleterre.

En poursuivant l'analyse de la richesse relative, on tâcheroit de découvrir pour combien les différentes classes de la société participent tant aux capitaux qu'aux fonds,

afin d'apprendre si la richesse nationale est généralement répandue, ou si elle se concentre dans quelques corporations; cette recherche feroit encore voir quelles sont les classes qui accumulent, et quelles sont celles qui dépensent le plus. On compareroit ensuite séparément l'état des capitaux et celui des fonds, avant de les comparer dans la combinaison, afin de s'assurer lesquels des deux ont le dessus: le résultat de cette recherche indiqueroit la marche progressive ou rétrograde de la richesse nationale. Enfin, pour rendre ces rapprochemens vraiment instructifs, on chercheroit à découvrir les causes de ces phénomènes que l'expérience auroit fournis, et en montrant la liaison naturelle qui existe entre ces effets et leurs causes, on acheveroit de convaincre le lecteur de la vérité des faits, en les constatant par un raisonnement qui en seroit absolument indépendant. Au reste, en traçant le tableau de la richesse d'une nation, on n'est guère forcé à se borner dans la comparaison à tel autre peuple: au contraire, plus on varie et plus on multiplie ces rapprochemens, plus l'exposition des faits en devient lumineuse et intéressante.

Les notions de richesse individuelle et de richesse nationale, telles que je viens de les développer, ont été vivement combattues par le lord *Lauderdale* *). La réputation de cet auteur et l'appareil spécieux de ses argumens m'engagent à prévenir les objections qu'on pourroit tirer de sa théorie pour les opposer à la mienne.

En premier lieu, je regarde la richesse individuelle et la richesse nationale comme de même nature, se composant des mêmes objets, et d'objets de la même valeur. Le lord est d'une opinion contraire sur cet article fondamental: il soutient que la richesse individuelle diffère absolument par sa nature de la richesse nationale.

Cette thèse est une suite de la définition qu'il donne de la valeur. „Il ne suffit pas, dit-il, qu'une chose soit utile ou agréable pour avoir de la valeur: il faut de plus qu'elle se trouve dans un certain degré de rareté. Ce principe sert à établir entre la *richesse publique* et la *richesse privée* une distinction bien frappante: l'une se fonde sur *l'abondance* des objets, l'autre sur leur *rareté*. Ainsi ces deux définitions sont exactes: la richesse publique consiste dans tout ce que l'homme desire comme lui étant utile ou agréable; la richesse privée consiste

*) Voyez le Chap. II. de ses recherches.

dans les mêmes choses, mais qui se trouvent dans un certain degré de rareté."

Comme les termes scientifiques de l'auteur diffèrent de ceux que j'ai adoptés, on me permettra avant tout de m'entendre avec lui sur le sens qu'il faut leur attribuer. 1°. Il est clair que chez lui les expressions de *richesse publique* et de *richesse privée* ont la même signification que chez moi celles de *richesse nationale* et de *richesse individuelle.* J'ai préféré ces dernières parce qu'elles sont bien plus propres à exprimer les idées que j'y attache, et je reserve les termes dont le lord se sert, pour désigner la fortune du fisc ou du gouvernement, par opposition à la fortune des particuliers ou des sujets. 2°. Quand l'auteur parle de *valeur,* il faut toujours entendre *prix* ou *valeur échangeable*, comme le sens du passage cité le prouve suffisamment.

La signification de ces termes ainsi fixée, voilà ce que l'auteur veut dire: La richesse nationale consiste dans la plus grande abondance de toutes les choses qui peuvent avoir de la valeur; la richesse individuelle dans le plus haut prix de celles que les individus possèdent. Or comme l'abondance diminue les prix, et que les hauts prix supposent une diminution de l'abondance, il en conclut que l'une de ces notions est opposée à l'autre.

Ce raisonnement est encore plus mal fondé qu'il n'est paradoxal. La richesse individuelle ne se fonde pas seulement sur le prix des objets qu'on possède : c'est la *masse* des richesses, unie à la valeur, qui constitue le degré de la fortune individuelle. Tout individu qui veut augmenter sa fortune, ne voit pour cela de moyen plus simple et plus prompt que celui de produire et d'accumuler des richesses : ainsi, loin d'en diminuer la quantité pour les rendre plus rares et pour en augmenter le prix, il en augmente la masse, et les rend par conséquent plus communes, ce qui diminue leur valeur. Sans doute la cupidité lui fait desirer que les objets qu'il produit ou qu'il accumule ne soient point produits ou accumulés par d'autres : mais ce desir est impuissant et stérile, tandis que celui de produire et d'accumuler se manifeste dans toute son énergie. Celui qui possède un capital, est toujours le maître de créer et d'accumuler des richesses ; mais il a rarement le pouvoir d'en diminuer la quantité produite par d'autres. Les exemples que l'auteur cite pour étayer sa thèse, ne sont pris que dans la classe des monopoleurs : or, le monopole n'existe que là où l'action libre de l'intérêt individuel est entravé. Cet intérêt, au contraire, conseille à tous les individus productifs de diminuer autant que possible le prix de leurs produits, afin

d'en pouvoir échanger d'avantage. C'est une maxime générale chez eux, qu'il vaut mieux vendre beaucoup et à bon marché, que de vendre peu et à haut prix.

Si la thèse de l'auteur étoit fondée, il en résulteroit que l'intérêt individuel est directement opposé à l'intérêt général. Cette conséquence renverseroit tous les principes de l'économie politique, et il faudroit de nouveau recourir au système de police réglémentaire que la raison a fait tant d'efforts pour détruire. Heureusement la théorie du lord n'est basée que sur l'illusion. L'intérêt de tout homme raisonnable lui montre une autre route pour augmenter sa fortune, que celle dont l'auteur prétend qu'il la suit: ce n'est pas en faisant de vains efforts pour hausser la *valeur* de ses produits qu'on devient riche, mais en travaillant pour en augmenter la *quantité* ou la *masse;* et voilà pourquoi tout individu productif, sans le savoir et sans le vouloir, concourt à favoriser l'intérêt général.

Mais si l'intérêt individuel tend à favoriser l'intérêt général, ce dernier se trouve aussi toujours parfaitement d'accord avec l'intérêt individuel. La richesse nationale ne peut s'accroître sans que les fortunes individuelles n'augmentent proportionellement. Dans cet état des choses, l'abondance générale fait que tous les citoyens, cha-

cun en raison de sa fortune, peuvent se procurer facilement tous les objets qu'ils desirent, c'est-à-dire que tout le monde est proportionellement riche. Quand la richesse nationale diminue, les fortunes individuelles s'en ressentent aussi-tôt: car toutes les choses nécessaires ou agréables devenant plus rares, chacun se procure plus difficilement celles qu'il desire, et souvent il en manque tout-à-fait, c'est-à-dire, tout le monde est proportionellement pauvre.

Ces considérations n'auroient pas du échapper à un écrivain qui prétend renverser touses les doctrines accréditées pour en établir une nouvelle. L'expérience journalière auroit pu lui fournir des argumens contre sa thèse; cependant sans comparer les résultats de son raisonnement avec les faits qu'il avoit sous les yeux, l'auteur persiste à poursuivre son principe chimérique. Ayant nié l'identité de la richesse individuelle et de la richesse nationale, il se voit entraîné à contester encore l'opinion généralement reçue que la totalité des fortunes individuelles constitue la richesse nationale. Voici les raisons dont il appuie cette étrange assertion.

„Il est évident, dit-il, que dans une société, où, soit par la libéralité de la nature, soit par l'effort de l'art, les hommes jouiroient de tout ce qu'exigent leurs

besoins, ils se trouveroient au plus haut degré de richesse nationale ; et néanmoins il est impossible qu'alors aucun objet eût de la valeur. " En d'autres termes : le plus haut degré de richesse nationale n'admet point de fortunes individuelles.

J'observe que l'abondance générale peut bien diminuer la valeur échangeable, mais qu'elle ne peut jamais la détruire entièrement. Supposez l'abondance la plus chimérique ; à moins de supposer encore que chaque personne ne soit pourvue individuellement de tout ce qu'elle peut desirer (ce qui seroit le comble de l'absurdité) vous êtes forcé de convenir qu'il se feroit des échanges : or les échanges supposent la valeur échangeable.

. . . . „ Diminuez cette abondance supposée, poursuit l'auteur, il est clair que vous appauvrirez la communauté ; mais par là vous donnerez infailliblement de la valeur à toutes les choses que l'homme desire, d'où naîtront les richesses individuelles. "

J'avoue de ne pas comprendre le sens de cette phrase. Nous venons de voir que la valeur échangeable existe et doit exister au sein de la plus grande abondance : cependant l'auteur prétend qu'elle ne peut naître que lorsque l'abondance diminue. Cette diminution peut avoir lieu de deux manières : ou elle s'étend sur tous les objets et

sur tous les habitans proportionellement, et dans ce cas, de riche qu'étoit tout le monde, tout le monde deviendroit pauvre; ou bien elle ne s'étend pas également sur tous les les objets et sur tous les habitans, et dans cette supposition certains objets acquerront une plus grande valeur et certains individus une plus grande fortune, tandis que d'autres objets perdront de leur valeur, et d'autres individus de leur fortune. En expliquant le passage cité dans le sens le plus favorable à l'auteur, voici apparemment ce qu'il a voulu dire: L'abondance générale suppose une certaine égalité dans les fortunes: faites qu'elle cesse d'être générale, elle deviendra partielle; par là vous appauvrirez la communauté, mais vous aurez des particuliers qui seront riches, et d'autres qui seront pauvres. — Si la découverte de l'auteur se réduit à cela, elle ne valoit pas la peine d'être faite.

Mais ce n'est pas ce que l'auteur a voulu dire, car cette explication ne présente aucun contraste entre la richesse individuelle et la richesse nationale. Il est clair qu'il soutient tout bonnement que le plus haut degré de richesse nationale n'admet point de fortunes individuelles; que ce n'est qu'en raison de sa diminution que les fortunes individuelles se forment et s'augmentent, d'où il s'ensuit qu'elles sont à leur comble quand la richesse natio-

nale s'anéantit tout-à-fait. C'est par une logique aussi étrange que l'auteur veut prouver que la somme des fortunes individuelles ne peut jamais représenter la richesse nationale.

Il seroit difficile à concevoir comment un homme instruit et judicieux a pu s'égarer à ce point dans son raisonnement, si l'expérience ne nous fournissoit souvent des exemples combien la vanité d'établir de nouveaux systèmes et le desir malin de nuire à la réputation des grands écrivains, peuvent aveugler les hommes mêmes les plus raisonnables. Tout le livre du lord *Lauderdale* n'est qu'une diatribe amère et pleine de fiel, dirigée contre le docteur *Smith*, et par ricochet contre son illustre disciple, le ministre *Pitt*. La passion ayant dirigé la plume de l'auteur, il n'est pas étonnant qu'il ait pris souvent des chimères pour des réalités. C'est ce qu'il lui est aussi arrivé cette fois-ci. En soutenant que les fortunes individuelles ne peuvent se former et s'augmenter qu'à mesure que la richesse nationale diminue, il a probablement supposé que le prix d'une marchandise peut hausser ou baisser, tandis que les prix de toutes les autres marchandises restent immuables. Dans cette supposition, chaque diminution de quantité seroit une augmentation de valeur, et si la quantité de toutes les marchandises diminuoit suc-

cessivement, il en résulteroit que les propriétaires de ces marchandises s'inrichiroient l'un après l'autre, précisément dans la même proportion, dans laquelle la richesse nationale diminneroit.

Cette illusion se détruit aussi-tôt qu'on se rappelle la nature de la valeur ou des prix. Le prix étant le rapport qui se trouve entre la valeur échangeable de deux choses, il s'ensuit que l'une de ces choses ne peut augmenter de prix, sans que la valeur de l'autre ne baisse proportionellement, et vice versa. Qu'un setier de blé vaille un tonneau de vin; dans cet exemple, le blé fait le prix du vin, comme le vin fait celui du blé. Si le prix du blé double, c'est parce que l'on consent à donner deux tonneaux de vin pour un setier de blé.

Ainsi, quand le prix d'une marchandise quelconque vient à hausser, la fortune d'une partie des citoyens augmente, celle des autres diminue, et la somme des fortunes individuelles reste la même. Quand le prix du fer hausse, les offrans de cette marchandise augmentent leur fortune, parce qu'ils peuvent échanger la même quantité de fer contre une plus grande quantité de telle autre marchandise qu'ils voudront; les demandeurs de fer voient leur fortune diminuée par la raison contraire.

Il n'y a qu'une seule circonstance, à ce qu'il me sem-

ble, où un changement dans la valeur d'une marchandise puisse réellement influer sur la somme des fortunes particulières, ou, ce qui revient au même, sur la richesse nationale. C'est, quand la marchandise dont le prix s'altère, est destinée à l'exportation. Quand le prix d'une telle marchandise s'élève, la nation qui l'exporte en retire le gain; celle qui la reçoit en souffre la perte, et réciproquement.

C'est donc pour avoir méconnu la nature de la valeur échangeable que le lord *Lauderdale* s'est laissé entraîner à cette étrange opinion, que la somme des fortunes individuelles ne constitue point la richesse nationale. Cette erreur est assés commune; on l'entend souvent débiter dans la société par des gens qui, malgré leur ignorance, sont les plus empressés à décider toutes les questions de l'économie politique: mais si de pareilles méprises sont pardonnables dans la conversation, elles ne doivent pas se glisser dans les ouvrages des écrivains qui prétendent éclairer leur siècle.

L'observation suivante expliquera peut-être comment il arrive qu'on perd si facilement de vue cette égalité de gains et de pertes dans les variations des prix. Lorsque le prix d'une marchandise s'altère, la fortune individuelle des offrans en est presque toujours plus affectée que celle

des demandeurs, parce que les grandes provisions de cette denrée se trouvent d'ordinaire dans les mains d'un petit nombre de personnes, tandis que les demandeurs forment une classe très-nombreuse. Quand le prix du sucre augmente subitement dans une ville de province, trois ou quatre marchands en gros font un profit considérable; une vingtaine de détailleurs et quelques confiseurs partagent ce gain: mais la perte se répartit sur vingt ou trente-mille habitans. Dans un cas pareil, tout le monde se recrie sur le gain énorme qu'ont fait les marchands, mais on compte pour peu de chose la perte des acheteurs, parce qu'en effet leur fortune individuelle en est peu affectée.



ANALYSE DES NOTIONS DE CAPITAL INDIVIDUEL ET DE CAPITAL NATIONAL.

PAR

HENRY STORCH.

Présenté à la Conférence le 20 Février 1811.

1.

On comprend sous le nom de *fonds*, toute provision de richesses qu'une personne physique ou morale accumule. Quand un fonds est consacré à la production, il prend le nom de *capital*.

Je dis, quand il est destiné à la production; car les mêmes objets, accumulés pour être employés ou consommés d'une manière improductive, ne constituent point un capital: on les appele alors *fonds de consommation*.

Ainsi, le caractère essentiel qui distingue les capitaux des fonds de consommation, c'est que les uns reproduisent leur valeur par l'action du travail productif qui les emploie, et que les autres ne la reproduisent point. Le capital se consomme tout aussi bien que le fonds de

consommation; mais en se consommant, il se reproduit. Un capital est une masse accumulée de richesses destinées à la consommation reproductive ou à la production; un fonds est une pareille masse de richesses destinées à la consommation stérile ou à la non-production. À la rigueur, la consommation reproductive n'est point une consommation: les individus improductifs consomment, mais l'ouvrier productif ne fait qu'échanger.

Remarquons bien que le capital est une masse accumulée de richesses de tout genre; que ce n'est point uniquement le numéraire qui les représente: car si l'ouvrier possède toutes les choses nécessaires à son travail, et qu'il n'a point d'argent, il travaillera fort bien; mais s'il a de l'argent et qu'il ne puisse l'échanger contre toutes ces choses, il lui sera impossible de travailler.

2.

Un capital peut être employé par celui qui le possède; il peut encore être employé par d'autres personnes auxquelles le propriétaire en cède l'usage. Le capital étant propre à créer des valeurs, son usage a une valeur aussi, et se paie pour l'ordinaire. Le payement pour l'usage d'un capital prêté se nomme un *intérêt* ou une *rente*.

Le capital ne donne pas seulement une rente au pro-

priétaire quand il le prête; il lui en donne encore quand il l'emploie lui-même. S'il en étoit autrement, il y auroit un avantage à ne pas employer soi-même les capitaux qu'on possède; ou bien l'emprunteur seroit hors d'état de payer une rente.

Nous venons de voir que les capitaux donnent un revenu: cette circonstance les distingue encore des fonds de consommation, car ceux-ci n'en donnent jamais. Elle nous sert à préciser l'idée que nous nous sommes faite de l'un et de l'autre.

Ainsi un capital est un fonds de richesses destinées à la production, un fonds qui reproduit sa valeur avec profit. Un fonds de consommation est un fonds de richesses destinées à la consommation, un fonds qui ne reproduit point sa valeur et qui ne donne point de profit.

3.

Jusqu'ici nous n'avons envisagé que les capitaux individuels: mais qu'est-ce que le *capital national?*

Au premier coup d'oeil on croiroit qu'il se constitue de la totalité des capitaux particuliers: mais ces deux notions ne sont pas tout-à-fait identiques. Il y a des capitaux qui sont improductifs pour la société, et qui pourtant rapportent un revenu à leurs possesseurs. Ces

capitaux naturellement ne font point partie du capital national.

Quand un fonds est employé par son propriétaire, il n'y a aucune difficulté à en distinguer la nature. S'il est employé à la consommation stérile, il est clair que ce fonds appartient au grand fonds national de consommation; s'il est employé à la production, il est clair qu'il fait partie du capital national.

Mais quand un fonds est prêté à d'autres personnes, et qu'il rapporte un revenu au prêteur, alors sa nature devient équivoque. D'un côté, il peut être regardé comme capital, puisqu'il donne un revenu; de l'autre, si l'emprunteur ne le destine pas à la production, mais qu'il l'emploie à la consommation stérile, il ne reproduit point sa valeur, et il peut être regardé comme fonds de consommation. Sous laquelle de ces deux cathégories faut-il le ranger?

Il n'est guère difficile de résoudre cette question. Ce n'est nullement le prêt ou la condition du prêt qui détermine la nature des fonds; c'est uniquement l'emploi qu'on en fait. Un fonds employé à la production est toujours un capital, soit qu'il appartienne en propre à celui qui l'emploie, soit que celui-ci l'ait emprunté; un fonds employé à la consommation stérile est toujours un

fonds de consommation, soit que le possesseur ou quelqu'autre personne l'emploie. De même un fonds emprunté, s'il est employé à la production, est toujours un capital, soit qu'il rapporte, ou non, un revenu à son propriétaire; un fonds emprunté, s'il est employé à la consommation stérile, est toujours un fonds de consommation, soit qu'il rapporte, ou non, un revenu à son possesseur.

Les possesseurs regardent leurs fonds comme capitaux, aussi-tôt qu'en les prètant à d'autres, ils leur rapportent un revenu; mais ces capitaux, s'ils ne donnent pas un revenu à la nation, ne font point partie du capital national. Le propriétaire d'une maison d'habitation, d'un jardin, d'une maison de campagne, regarde ces bien-fonds comme des capitaux, puisqu'en les louant il en retire un revenu: mais ils ne forment une portion du capital national, que lorsqu'ils donnent un revenu à ceux qui les louent, ou, ce qui revient au même, lorsqu'ils sont employés à la production. Un atelier, une boutique, un bâtiment de ferme, au contraire, sont en tout cas des capitaux productifs, des capitaux qui rapportent un revenu non-seulement au propriétaire, mais encore à l'ouvrier qui les occupe et les emploie, ce qui veut dire, à la société. Une maison d'habitation peut bien aussi former un capital productif, mais alors il faut qu'elle soit habitée

par des ouvriers productifs qui reproduisent par leur travail la valeur du loyer qu'ils consomment. L'argent, quand il est prêté à d'autres, rapporte ordinairement un intérêt à son propriétaire: mais s'il est emprunté par des individus qui l'emploient d'une manière improductive, les choses que ces individus achètent avec cet argent, ne font dès-lors plus partie du capital national.

Les produits de la nature et du travail industriel ne forment des capitaux que tant qu'ils servent à la production: dès qu'ils passent dans les mains des consommateurs stériles, ils vont augmenter le fonds de consommation. Ainsi la laine est un capital entre les mains du berger, du cardeur, du fileur, du teinturier, du tisserand; le drap que celui-ci en fait, est de même un capital entre les mains du marchand en gros et du détailleur. Jusqu'ici il est facile de reconnoître dans ce produit le caractère de capital: il a servi de matière première à tous ces ouvriers. En quittant la boutique du détailleur, le drap devient un objet de consommation; mais pour cela il n'est pas encore décidé s'il perdra la nature d'un capital. S'il sert à habiller des ouvriers productifs, il conserve cette nature, quoique dans un autre genre: au lieu de servir de matière première au producteur, il lui sert comme vêtement, comme partie des choses qu'exige son entretien. S'il

est consommé par un ferblantier, ce drap se trouve reproduit sous la forme d'ustensiles de fer-blanc; s'il habille un peintre, la valeur de ses tableaux contient nécessairement la valeur de ce drap. Mais s'il passe dans les mains d'individus improductifs, il cesse d'être capital, il va grossir le fonds de consommation, car alors il n'est plus employé à la production, et il ne donne plus de revenu.

Ainsi le capital *individuel* se compose d'un fonds de richesses qui donne un revenu à son possesseur; le capital *national* se constitue du fonds entier de richesses qui donne un revenu à la société, et l'on a vû que ces deux notions ne reviennent pas au même. Les capitaux individuels comprennent des capitaux productifs et des capitaux improductifs; le capital national ne se compose que des capitaux productifs de la nation *).

4.

Si le fonds destiné à la consommation stérile est appellé fonds de consommation, cette expression ne veut

*) Cette distinction, qui est d'une grande importance dans l'application, paroît avoir échappé à tous les auteurs qui ont écrit sur l'Économie politique. *Smith*, à la vérité, reconnoît une différence entre les fonds prêtés qui rapportent un revenu à leurs propriétaires, et ceux qui en donnent en même tems à la société (v. Liv. II., ch. 1, au commencement): cependant, dans tous les endroits de son ouvrage ou il s'agit de capital national, il le définit constamment par la totalité des capitaux individuels.

pas dire qu'il se compose uniquement de choses qui sont détruites à l'instant même où on les emploie: nous savons que le mot de consommation, faute d'un terme plus général, comprend encore deux autres genres d'emploi, la jouissance et l'usage *). Ainsi le fonds de consommation se compose en grande partie de richesses qui peuvent durer et servir longtems, même des siècles, comme les maisons, les diamans, les statues, les livres, la vaisselle d'or et d'argent etc. Cette observation fournit plusieurs conséquences intéressantes.

1°. Le fonds de consommation, en tant qu'il consiste en choses durables, peut augmenter d'année en année, de génération en génération, et accroître par là la masse des jouissances d'une nation.

2°. Les richesses durables qui le composent, peuvent être converties en capitaux; par conséquent elles ne sont pas entièrement perdues pour la production. Une maison habitée par des gens oisifs peut être changée en un atelier; un jardin d'agrément en une ferme; un collier de diamans en outils.

3°. Il y a plusieurs espèces de richesses durables qui ont la faculté de servir à la fois, à la jouissance et

*) Voyez ces Mémoires, Vol. II. p. 432.

à la production, ou à l'usage et à la production, comme les livres, les tableaux, les statues, les beaux édifices. Ces sortes de richesses appartiennent tant au capital national qu'au fonds de consommation.

4°. Il résulte de tout cela que les richesses comprises dans le fonds de consommation d'une nation forment une partie intégrante de la *richesse nationale*, et que celle-ci se compose de la masse totale de capitaux et de fonds que la nation possède.

SUR LE NOMBRE DES HABITANS DE LA RUSSIE ET SUR LES PROGRÈS DE SA POPULATION,

D'APRÈS LES ÉTATS FAITS PAR ORDRE DU GOUVERNEMENT.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 24 Mai 1809.

L'état de la population est deja par lui même un objet très intéressant, puisqu'il prouve l'aisance et le bien-être dont jouissent les citoiens et puisqu'il fait connoitre les forces dont le Gouvernement peut disposer; mais il l'est devenu surtout en Russie par les différences, qui se trouvent sur la totalité des habitans. *Schlözer* rapporte *) que pendant son sejour en Russie il représenta à ses supérieurs: combien il étoit surprenant qu'on ne connoissoit pas même le nombre total des habitans de l'Empire et que les Variantes à ce sujet paroissoient incroyables; et *B. F. I. Hermann* assure **) qu'il n'y a pas d'Etat en Europe où les données sur le nombre des habitans fussent plus

*) *Schlözer* Histoire de sa vie T. I.

**) Journal statistique T. I. Partie 2. p. 19.

différentes. L'auteur de l'Essai sur le commerce de cet Empire (le *Clerc*) admet 14 millions d'habitans, *Voltaire*, *Marshal* et *Williams* 18, *Leveque* 19, *Busching* dans la premiere édition de sa Géographie marque 20, et dans la dernière 30, *Albaum* 22, *Coxe* 23, *Sufsmilch* et *Ebeling* 24, *Crome* 25, *Pleschtchéef* 26 et demi, *Hupel* 28, *Beausobre* 30, *Schlözer* dans l'histoire de sa vie 33, *Meusel* dans la dernière édition de sa Statistique a entre 35 et 36 millions, *Storch* 36, *Sablowski* dans sa Géographie de la Russie 41 et dans sa Statistique 44, l'Annuaire portatif de St. Pétersbourg pour 1808 42. On seroit porté à croire que le Gouvernement ne s'est point occupé particulièrement de cet objet ou qu'il a tenu ses résultats secrets.

Mais le Gouvernement a fait faire depuis près d'un siècle des denombremens partiels, et depuis une dixaine d'années des denombremens généraux. Les résultats de ces états sont l'objet de la première partie de ce Mémoire.

Et quant aux plaintes sur les différences incroyables entre les données des statisticiens sur la totalité de la population russe, je ne les ai pas trouvé aussi fondées qu'on les croit communement, d'après les recherches sur les progrès de la population en Russie, faites dans la seconde partie du Mémoire.

Première partie.

Résultats des dénombremens partiels et généraux faits par ordre du Gouvernement.

La Russie a des *denombremens partiels* depuis 1720 faits avec beaucoup d'exactitude. Ceux qui embrassent la plus grande partie de la nation et qui sont executés avec le plus de soin sont *les Revisions*, dont les trois premieres étoient partielles et avoient un but purement financiel et militaire. C'est l'enregistrement de tous les hommes qui paient des impôts directs. Ils sont de trois classes: la premiere païe la Capitation et fournit aux levées militaires, c'est la classe des paysans, la seconde païe simplement la Capitation, ce sont les bourgeois, la troisième ne païe qu'un impôt du capital, ce sont les marchands. D'après cela les états sur la population ont deux tîtres généraux, le premier comprend ceux qui païent des impôts directs: les paysans, les bourgeois et les marchands, le second tître comprend tous ceux qui ne les paient point; mais la classe des paysans est proprement celle que l'on entend par revisionaires. Outre ces dénombremens partiels qui regardent le gros de la nation chaque Département fait le denombrement des personnes qui en dependent. Le Clergé est enregistré au St. Synode, la

Noblesse a ses registres qui sont forts exacts dans les Gouvernemens russes et allemands, moins sûrs dans les ci-devant provinces polonoises et turques, le militaire est inscrit au Ministère de la guerre etc. La Russie a aussi des *dénombremens généraux* d'abord par l'étendue qu'on a donné à la quatrième et à la cinquième Revision en 1781 et en 1796, et ensuite par les dénombremens annuels ordonnés en 1800 par l'Oukase du 17 Janvier, et repetée le 8 Septembre 1802.

On ne sauroit dire que tous ces dénombremens soient plus mal fait en Russie qu'ailleurs, au contraire ils se font avec beaucoup d'exactitude pour les habitans qui paient des impôts directs. Et ce tître embrasse un plus grand nombre d'habitans en Russie que dans les Etats où la classe des citoiens libres est plus grande, où les impôts sont pour la plûpart indirects et où le service militaire est volontaire. S'il y avoit un point de reunion, un Bureau de statistique pour la revision et pour la redaction des ces dénombremens, on pourroit parvenir a des résultats très exacts surtout aprésent que la nation est accoutumée à ces dénombremens depuis un siècle. La partie la plus foible de ces états est le tître des (Rasnoschinzi ou Rasnago svanie ne plataigtschich) individus de différens états et conditions, qui ne paient point d'impôts directs, n'appartiennent à au-

eune corporation et ne sont pas au service. Cette classe est assez considérable, car elle fait plus qu'un million d'habitans. Puis les femmes, qui selon les états que j'ai pu consulter sont toujours marquées en trop petit nombre. Enfin les peuples chasseurs et les Nomades, dont la vie errante met de grands obstacles à l'exactitude de l'enregistrement.

C'est de ces élémens, dont la nature est assurement très différente, que le nombre total des habitans de la Russie marqué par les denombremens généraux est composé. Heureusement que la majeure partie du total a un haut degré de vraisemblance. Quant au reste il est aisé de prévoir que le nombre total indiqué par les dénombremens généraux comme ils se font jusqu'aprésent en Russie doit être toujours au dessous de l'état effectif.

Les denombremens partiels les plus remarquables sont les trois premières Revisions et la somme totale des paysans que les Gouverneurs indiquent annuellement au Ministère de l'intérieur.

La difficulté de relèver la Capitation et de fixer les levées militaires à cause du mouvement perpétuel de la population engagea *Pierre* le grand de marquer definitivement le nombre d'individus soumis à cet impôt et aux levées militaires, en faisant enregistrer une fois pour l'es-

pace de vingt ans, âge surtout propre au service militaire, tous les mâles sans exception, compris dans cette classe d'habitans. Le nombre total des individus enregistrés est invariable jusqu'à un nouvel enregistrement qui porte le nom de Revision; les décès sont compensés par les naissances. D'après cela l'état annuel de la population ne peut pas être connu exactement par le nombre des Revisionaires, mais il fournit toujours la base la plus vraisemblable. Par ce moien unique dans son genre le génie de *Pierre* le grand a tranquillisé le Gouvernement sur la repartition des impôts et des levées militaires et a abandonné aux différentes corporations soumises aux impôts directs le soin de remplir leurs obligations envers l'Etat de la manière qu'ils jugent la plus convenable pour eux, ce qui s'execute réellement d'une manière exemplaire surtout dans les communes des paysans. Le Gouvernement au contraire est sûr pour vingt ans de son revenu et du nombre d'indivividus sur lequel il peut compter pour le service militaire.

Les trois premières Revisions qui étoient des dénombremens partiels furent executés dans les années 1720 — 1723, 1741 — 1743, 1761 — 1763; l'an de la Revision qu'on cite ordinairement pour ces dénombremens est l'an 1722, 1742 et 1762.

La première Revision ordonnée en 1728 et terminée en 1723 donnoit le nombre total de 5,794,928 Revisionaires; c'est le nombre connu et rapporté par tous les statisticiens de la Russie. Mais selon un état sur la population envoyé à *Voltaire* pour l'Histoire de *Pierre* le Grand, qui se trouve actuellement dans le premier volume in folio des Manuscrits qu'on lui a remis et qui sont revenus avec sa Bibliotheque à l'Hermitage de St. Pétersbourg, il n'y avoit à la première Revision que 5,401,083 Revisionaires qui païoient leur Capitation aux Regimens, selon l'arrangement qu'on avoit pris à l'etablissement du soldat perpétuel en Russie, et 34,971 qui ne les païoient pas aux Regimens, nombre total des Revisionaires 5,436,054. La différence de 358,874 mâles est trop considérable pour être provenue d'une erreur ou dans le calcul ou dans un denombrement dont le but étoit financiel et militaire et qui étoit ordonné par *Pierre* le Grand. J'avoue que je ne saurois expliquer la cause de cette différence d'une manière satisfaisante, car même en supposant que l'état envoié à *Voltaire* n'auroit pas compris les bourgeois et les marchands, ce qui peut font bien être, puisqu'ils ne sont pas Revisionaires, le nombre de 358,874 me paroit trop grand pour l'état de l'industrie de ces tems là, puisque actuellement que la population est trois fois plus consi-

dérable et que la richesse nationale a sans contredit beaucoup gagnée, le nombre des bourgeois et des marchands ne passe pas 650,000 individus males. Donc il me reste quelque incertitude sur le dernier résultat de la première Revision.

La seconde Revision qui fut ordonnée en 1741 et terminée en 1743 laisse aussi quelques incertitudes. Il y a deux tableaux et même trois de ce dénombrement, dont l'un indique 6,646,390 individus mâles compris dans la Revision et l'autre 6,677,167, *Georgi* ne marque que 6,643,335. La différence de 30,777 entre les deux premières données est moins considérable que le deficit à la première Revision et repond assez au nombre des Revisionaires qui à la première Revision ne païoient pas la Capitation aux Regimens. Je n'ai pas de donnée pour expliquer cette différence.

La troisième Revision de 1762 est la seule sur laquelle il n'y a qu'une seule donnée, le nombre total est généralement marqué à 7,363,348 Revisionaires.

Ce seroit le lieu de parler à la suite de ces dénombremens partiels, de ceux faits annuellement depuis 1800 sur le nombre des paysans, mais pour ne pas interompre l'ordre chronologique, je passe à la quatrième Revision

ordonnée en 1781 et terminée en 1783, avec laquelle les *denombremens généraux* commencent en Russie.

Le but de cette Revision générale étoit de soulager le peuple, qui souffre nécessairement à la longue de l'inégalité qui s'introduit dans la répartition des impôts et autres redevances civiles et militaires par la perte de ceux qui sont morts et pour lesquels on paie toujours, tandis que ceux qui sont nés depuis ne paient rien. Ce but est encore enoncé dans l'Oukase du 30 Juin 1794 pour la cinquième Revision. *Les principes* de ce denombrement général étoient: que personne ne seroit exempt de la Revision et que chacun seroit enrégistré selon son âge, son sexe et son état v. le Manifeste du 22 Novembre 1781 §. 1 et §. 12. La *méthode* suivie dans ce dénombrement et presque celle de *Sonnenfels.* On vendit des formulaires imprimés (§. 4.) à bas prix, que les magistrats remplissoient dans les villes, et les préposés, les Directeurs, les anciens de village, les fermiers dans les campagnes, mais personne n'étoit obligé d'acheter ces formulaires, il pouvoit faire son rapport par écrit sur une feuille ordinaire (§. 6.). Le §. 3. est surtout remarquable où il est dit: on doit marquer dans les rapports sur les Campagnes le nombre des habitans et de leurs domestiques selon leur age et selon leur sexe, en y ajoutant les nou-

veaux établissemens faits dépuis la dernière Revision et marquer d'ou l'on a pris les paysans pour la nouvelle habitation, de même si un village ou un bourg a été ruiné par quelque hazard et vers où les habitans se sont portés. — On voit ici un but supérieur à celui des finances ou des levées militaires, un but vraiment économique. Une connoissance aussi détaillée des changemens arrivés dans les campagnes avec toutes les circonstances a du fournir les bases les plus sures au legislateur politique. On a assurement repondu a toutes ces questions proposées avec tant de sagesse, mais j'ignore les résultats de la rédaction des données. Un tableau général auroit fait connoitre les progrès de l'agriculture et de l'industrie dans les campagnes. Les données sur les derniers résultats de cette quatrième revision sont différentes et imparfaites, *Georgi* marque 12,527,699 màles soumis aux impòts directs et 310,830 hommes qui ne les païoient pas. *Storch* comprend les deux sommes de *Georgi* en indiquant 12,838,529, mais *Hermann* marque vraisemblement la véritable somme totale: 13,176,411 màles. La différence est de 340,882. Il me paroit que le premier nombre est celui des révisionaires, le second celui des bourgeois et marchands et la différence le nombre de la Noblesse et du Clergé. De pareilles différences se trouvent

à tout moment dans les données des Statisticiens et même dans les rapports officiels. Toutes ces sommes peuvent être justes, la différence provient seulement de ce qu'on donne une somme particulière pour le total. Le nombre des femmes manque absolument et parconséquent la totalité de la quatrième Revision est en partie inconnue.

La cinquième Revision ordonnée en 1794 et terminée en 1796 comprenoît aussi tous les habitans de la Russie avec les exceptions ordinaires, c'est-à-dire: sans les deux Capitales, sans le militaire et sans les peuples Chasseurs et Nomades. Elle a été executée avec beaucoup d'exactitude sous le regne de *Paul I.* C'est donc un des denombremens les plus remarquables fait en Russie. J'ai été assez heureux de recevoir les résultats de ce denombrement qui n'ont pas encore été publiés. J'ai recu deux états sur la population d'après la cinquième Revision, le premier du Sénat, l'autre du Ministère des Finances. Comme le premier a servi pour la ferme des eaux-de vie en 1803 il ne contient que les individus mâles et l'on peut compter sur son exactitude. Il a pour titre: nombre des individus mâles d'après la cinquième Revision. Le dernier resultat est

17,815,370 hommes.

Le second état est très circonstancié et comprend les deux sexes, son dernier résultat est

17,800,536 individus mâles.

La petite différence provient de quelques lacunes dans le dernier tableau qu'on na pas osé remplir puisque les rapports officiels n'étoient pas encore arrivés. Le premier nombre total est donc le véritable et le second ne fait que le confirmer.

Le nombre des femmes marqué au dernier tableau est de

16,223,229.

Ce nombre me paroit trop petit, et provient de ce que le denombrement des femmes ne se fait pas encore avec exactitude.

D'après cela le dernier résultat de la cinquième révision étoit

17,815,370 hommes,
16,223,229 femmes,

34,038,500 habitans de la Russie, avec les exceptions susmentionnées.

Nous venons aux *dénombremens annuels.* L'Oukase du 17 Janvier 1800 ordonne aux Gouverneurs civils de faire annuellement des rapports exacts sur l'état des sémailles et des recoltes comme aussi sur l'état de la population sans excepter personne. Ce Decret fut repeté le 8 de

Septembre 1802 par le Sénat. Les Gouverneurs civils doivent tacher de donner toute l'exactitude possible aux Rapports sur les sémailles et sur les recoltes de leurs Gouvernemens, comme aussi sur le nombre des habitans et nommement *de tous en général qui s'y trouvent sans excepter personne.*

Depuis ce tems il y a eu des denombremens généraux repetés tous les ans en Russie. Voici les résultats des premières cinq années, comme je les ai reçu du Ministère de l'Intérieur.

En 1800 la somme totale des habitans de la Russie des deux sexes étoit de

	33,159,860.
En 1801	34,043,357.
En 1802	34,893,828.
En 1803	35,134,177.
En 1804	36,043,483.

J'ai reçu de la même source les données suivantes sur *les individus non compris dans ces états.*

1. Les habitans domiciliés de St. Pétersbourg sans le militaire (evalué entre 30 à 40,000 hommes) 170,000. Ce nombre peut-être vrai pour les habitans domiciliés, mais il est fort au dessous de la population générale,

cela arrive ordinairement avec les données sur la population des villes en Russie, car il y avoit à St. Pétersbourg en 1789: 217,000 habitans des deux sexes sans le militaire, et en 1803: 244,000, en 1810 près de 300,000.

2. Les habitans domiciliés de Moscou sont marqués à 300,000 individus. Le nombre des habitans domiciliés est environ de 240,000, mais la population augmente en hiver jusqu'a 400,000.

3. Le militaire est evalué en nombre rond a: 400,000. Encore beaucoup trop peu. D'après les états de l'an 1805 les Gardes, la Cavallerie et l'Infanterie formerent seul un corps de 362,223 hommes, l'Artillerie et le Génie 45,000, les Garnisons au moins 111,420 hommes, somme totale 518,643. En y ajoutant au moins 100,000 hommes de trouppes irréguliaires les forces de terre passent 600,000 hommes.

4. Les nomades sont évalués à 1,500,000 individus des deux sexes.

On voit aisement que ces quatre sommes sont peu exactes. J'admets en nombre ronds:

1) habitans de St. Pétersbourg 240,000 des deux sexes
2) habitans de Moscou au terme moien 320,000.
3) les forces de terre 600,000 hommes, leurs femmes et enfans 300,000.

4) les Nomades 1,500,000 des deux sexes, total 2,960,000 individus, qui ajoutés à l'état de la population en 1804 présentent le nombre de 39,003,483.

Mais encore ce nombre total et *au dessous de l'état effectif* d'après la remarque faite sur les états qu'on m'a communiqué du Ministère de l'Intérieur où il est dit: „la compaaison des Rapports faits par les Gouverneurs civils avec les étets de la cinquième Revision ont prouvé que plusieurs Gouverneurs n'ont fait que copier les anciens états sur les classes soumises aux impôts directs sans y ajouter les individus qui ne le sont point. Dans plusieurs Gouvernemens le nombre indiqué diffère très peu du nombre de la première classe marqué par la Revision, même dans des Gouvernemens où il y a une noblesse nombreuse et des villes bien peuplées. À Novogorod la différence n'est que de 700 individus des deux sexes, à Smolensk de 16,000, à Plescou de 15,000, à Kalouga de 7000, à Resan de 9000, à Kasan de 3000. À Vaetka le denombrement annuel indique moins que la 5me Revision. Considérant l'imperfection qui existe encore dans les dénombremens annuels on peut hardiment ajouter 20,000 individus par Gouvernement ce qui feroit un million sur 50 Gouvernemens, d'ou il resulteroit une totalité de 40 millions. Enfin le surplus des naissances sur les décès

est environ de 500,000 enfans nouveaux nés, ce qui fait dans les dix années depuis la dernière revision de 1796 jusqu'en 1806 cinq millions. En admettant qu'un quart du nombre des nouveaux nés parvient à l'age de 18 à 20 ans on pourra évaluer les progrès réels de la population à 1,250,000 individus. "

D'après ces élemens on auroit pour la population de la Russie en 1806.

1) La somme totale du denombrement annuel de 1804 .	39,003,483.
2) Compensation pour les imperfections des denombremens annuels	1,000,000.
3) Progrès de la population par le surplus des naissances pendant dix ans	1,250,000.
Nombre total	41,253,483 individus.

C'est le nombre des habitans de la Russie connu par les denombremens et rectifié par des évaluations vraisemblables.

Le surplus de 3 millions qu'on trouve au denombrement de 1806 sur celui de 1800 n'est pas l'effet des progrès rapides de la population, il est dû au soin qu'on

a mis à perfectionner les denombremens annuels. En continuant de même je suppose que dans les cinq années suivantes il y aura un nouveau surplus, mais pas aussi considérable, peut être de la moitié du précédent. D'après cela je suppose que les denombremens annuels pourront monter en 1811 jusqu'à 42 millions et demi, ou tout au plus jusqu'à 43 millions. Puis ils s'arreteront pour bien long tems à la même somme, car en examinant impartialement l'état actuel de l'agriculture, des manufactures et du commerce de la Russie, il me semble que ces différentes branches de l'industrie, desquelles dependent les progrès de la population ont atteint ce degré de perfection que la richesse nationale de cet Empire permet actuellement. La paix et des circonstances heureuses et imprevues pourront les porter à un plus haut degré de perfection, mais ces suppositions passent les bornes de la Statistique.

J'ajoute enfin comme une des données les plus intéressantes le nombre total des Revisionaires dans le sens le plus strict, ou des paysans d'après les denombremens annuels. Le nombre total d'après la Révision de 1796 étoit de 15,718,083 individus mâles.

D'après le denombrement de

1800	15,707,781.
1801	15,747,379.
1802	15,895,609.
1803	15,824,287.
1804	15,806,778.

Sur cet état se trouve la remarque suivante: „la différence dans ces sommes provient des migrations des paysans d'un Gouvernement dans l'autre, car il arrive à ces changemens de domicile qu'une Chambre de finances decompte les paysans qui se deplacent, avant que l'autre puisse ajouter les nouveaux venus, ou que toutes les deux comptent les mêmes individus dans leurs registres, ou enfin que toutes les deux les omettent entièrement."

Je n'ai pas hésité de faire remarquer les incertitudes qui restuent jusqu'àpresent sur les derniers résultats des dénombremens faits par ordre du Gouvernement. Je conviens que cette partie de l'administration pourroit être portée à un plus haut degré de perfection. Mais il ne faut jamais prétendre une exactitude mathematique dont les denombremens ne sont pas susceptibles, et il ne faut pas croire que les imperfections de nos denombremens soient inouïes.

Quand *le Comité de division* de l'assemblée constituante fit un dénombrement en 1791, il eut dans un pre-

mier travail 28,896,000 individus et quelques années après cette somme fut réduite par un second travail à 26,363,000 *).

En *Hongrie* un premier denombrement fait en 1785 donna 7,008,574 individus, un second en 1786, 7,044,462, un troisième en 1787, 7,116,780, et après tant de sacrifices que l'Hongrie a fait dans ces derniers tems, le denombrement de 1810 marqua 7,398,104, preuve des imperfections des premiers denombremens **).

Malthus donne à *l'Angleterre* proprement dite et à la principeauté de *Galles* en 1677 cinq millions d'habitans, *Petty* en 1682 sept millions 400,000. Davenant en 1692 7 a 8 millions, *King* en 1699 n'admet que 5 millions et *Derham* croit que cette donnée est des plus justes. *Decker* en 1742 suppose 7,200,000 et *Mitchel* vers le même tems 5,700,000, le Docteur *Brakenridge* 5,340,000, Price enfin 5,500,000.

Un savant qui a été lui même emploié en *Prusse* a relever des états sur la population fait l'aveu suivant: ***) ces états qui portent le nom de tableaux historiques en

*) *Herbin* statistique générale et particuliere de la France. T. I. Art. population.

**) *Schwartner* statistique de l'Hongrie 1798. p. 71.

***) Allgemeine Literatur-Zeitung, 1805. Nr. 265.

Prusse, sont redigés par la dernière classe des commissaires de la Police, qui regardent ce devoir comme un fardeau penible et inutile. Il arrive rarement que le commissaire visite toutes les maisons, il corrige ordinairement un ancien registre d'après les connoissances locales qu'il a aquis. Et même s'il visite toutes les maisons il ne pense guère à vérifier les rapports qu'on lui fait et se repose sur le témoignage des voisins s'il ne trouve point le maitre à la maison, souvent il remplit les lacunes au hazard pour ne pas revenir une seconde fois. Toutes ces difficultés qui existent deja dans les villes, deviennent plus grandes dans les campagnes, puisque les formulaires des tableaux historiques sont trop détaillés pour des anciens de village; ils rangent naturellement tous les hommes sous le même titre comme aussi toutes les femmes, sans distinguer l'âge, l'état, les voyageurs etc. De cette manière les états sur la population des campagnes grossissent toujours le nombre des habitans. J'ai fait faire moi même plusieurs denombremens partiels, et comme il arriva qu'un autre Département fit compter les mêmes personnes en même tems pour un autre but, on trouva ordinairement une différence de quelques centaines sur un total qui ne passoit pas mille! —

Seconde partie.

Des progrès de la population en Russie.

La première Revision de 1722 donna 5,794,928 individus mâles, ce qui fait supposer avec un nombre égal de femmes une population de 11,589,859 individus des deux sexes. Combien faut-il ajouter pour les nouvelles aquisitions où la Revision n'avoit pas eu lieu?

Un dénombrement fait en petite Russie *) 1768 donnoit 955,228 individus des deux sexes, un autre fait en Finlande en 1755 marque 117,998; l'Esthlande avoit en 1773 176,000 habitans, la Livonie 447,360, somme totale 1,696,586 individus des deux sexes. Mais ces denombremens sont faits 20, 30, 50 ans après la première aquisition, il-seroit donc possible que la population auroit ou gagnée ou perdue pendant ce long espace de tems. En comparant ces données avec un dénombrement fait en 1805 nous voyons que la Finlande a gagné en 49 ans 64,392 individus des deux sexes, l'Esthlande en 31 ans 36,948 et la Livonie dans le même espace de tems 138,097 somme totale 239,439. La population a donc gagnée environ un quart dans les provinces baltiques pendant la dernière moitié du 18me siècle. En comparant la population indiquée sous le titre de petite Rus-

*) *Hermann* Journal statistique T. I. Partie 2. p. 14.

sie avec les Gouvernemens de Tschernigow et de Poltawa on trouve en 1804 un surplus de 1,465,465 individus des deux sexes sur le dénombrement de 1768. D'après cela la population y auroit plus que doublée en moins que 50 ans. Ce résultat repond fort bien aux observations faites sur les registres des naissances et des morts, que les progrès de la population sont très lents dans les provinces baltiques et très rapides en petite Russie. Elle a surtout gagnée dans ces derniers tems par le commerce d'Odesse, le prix des terres haussoit considérablement, mèmes les steppes fertiles furent cultivées.

En admettant la même proportion dans les progrès de la population de ces provinces pendant la première moitié du 18me siècle, ce qui est assurement beaucoup, il faudroit déduire de la population indiquée des provinces baltiques un quart, reste 555,919 individus des deux sexes et la moitié de la population de la petite Russie en 1768, reste 477,614. Donc le total de la population pour les provinces aquises depuis 1722 peut-être évalué à 1,033,533 individus.

Il nous reste enfin à déterminer quel pouvoit être alors le nombre des individus libres non compris dans la Revision Comme il y eut à la dernière Revision en 1796 16 millions d'individus mâles compris sous la classe de

ceux qui païent des impôts directs sur un million qui ne les païent pas, on peut supposer à la première Revision ou il y eut 5 millions de Revisionaires le nombre de 300,000 individus mâles pour la classe de ceux qui sont libres d'impôts directs et avec les femmes environ 600,000.

D'après ces calculs l'état vraisemblable de la population en Russie auroit été en 1722 :

revisionaires .	11,589,859
individus libres	600,000
provinces aquises	1,033,533
	13,223,392.

L'auteur de l'Essai sur le comerce de Russie (le *Clerc*) ouvrage publié en 1777 marque 14 millions, *Hermann* de même. Ce nombre est probable, mais quand *Voltaire* donne aux dernières années de *Pierre* le Grand une population de 18 millions, il confond des tems postérieurs avec le regne de ce Monarque. Il me semble que 14 millions sont la somme la plus vraisemblable, vu l'imperfection inséparable d'un premier dénombrement et l'incertitude des calculs sur la population des provinces nouvellement aquises.

La seconde Revision en 1742 donner 6,672,167 mâles et en supposant un nombre égal de femmes 13,340,334

habitans de la Russie, à quoi il faut ajouter les provinces aquises et les individus libres. Comme nous avons déduit un quart de la population des provinces baltiques en 1773, nous n'en déduirons qu'un huitième pour l'état de la population dans ces provinces après 20 ans passés, reste 648,689, et un quart de la population de la petite Russie en 1768, reste 706,421, total pour les provinces aquises 1,355,110. Le nombre des Revisionaires étant augmenté dépuis 1722 jusqu'en 1742 d'un million, il faudra aussi augmenter le nombre des individus libres au moins de 50,000, vu les progrès de l'industrie et les améliorations dans l'organisation de l'administration. D'après cela l'état de la population en 1742 auroit été:

revisionaires .	13,346,334
individus libres	700,000
provinces aquises	1,355,110
	15,401,444.

Hermann admet pour cette année le nombre rond de 16 millions, total très vraisemblable, car les dénombremens en Russie ont toujours été au dessous de l'état effectif.

La troisième Revision de 1762 donna 7,363,548 mâles, ce qui fait supposer un total de 14,727,096 individus. Les dénombremens susmentionnés de la Finlande de

1755, de la petite Russie en 1768 et de l'Esthlande et de Livonie de 1737 renferment un espace de tems dont l'an de la Revision est à peu près le terme moïen. On peut donc admettre l'état de ces dénombremens tel qu'il est indiqué 1,696,586 individus des deux sexes. Les Revisionaires étant alors au nombre de 7 millions et se trouvant actuellement au nombre de 16 millions c'est-à-dire qu'ils étoiens alors presque la moitié de ce qu'ils sont aprésent, on peut admettre la même proportion pour les individus libres et supposer 400,000, mâles de cette classe. D'après cela l'état vraisemblable de la population en Russie auroit été en 1762:

Revisionaires .	14,727,096
provinces aquises	1,696,586
individus libres .	800,000
	17,223,682.

Marshal en 1768—1770 et *Williams* 1768 admettent 18 millions, *Leveque* 1782 et le *Clerc* 1783 19 millions, *Schlözer* et *Busching* 1765: 20 millions, *Hermann* est du même sentiment. Je suppose l'état vériable de la population en 1762 entre 18 et 19 millions.

La quatrième Revision générale de 1782 donna 12,838,529, avec les femmes 25,677,058 ou selon *Her-*

mann 26,358,822. Les Capitales, le militaire, les Nomades ne sont pas compris dans ce nombre. Ils donnent aprésent un total de 2,960,000, on peut les supposer alors à 2 millions. D'après cela la population de la Russie en 1782 auroit été entre 27 à 28 millions. *Crome* en 1785 admettoit 23 millions, *Susmilch* 24, *Pleschtschéef* sans clergé, sans l'état civil et militaire et sans les Nomade admet 26,617,698 en 43 Gouvernemens, *Hupel* 1780 — 1790 et *Hermann* indiquent 28 millions.

La cinquième Revision de 1796 donnoit 17,816,370 individus mâles avec un nombre égal de femmes 35,630,770 ou selon la donnée de 16,223,229 que je crois bien au dessous de la verité 34,038,599. En y ajoutant les Capitales, le militaire et les Nomades au nombre susmentionné de 2,960,000 l'état connu de la population en 1796 auroit été de 36,998,599. *Busching* et *Beausobre* marquent 30 millions, *Schlözer* 33, *Hermann* 33½, *Meusel* entre 35 et 36 et *Storch* 36.

D'après ces données les *progrès de la population en Russie*, opérés tant par l'augmentation de l'intérieur que par les nouvelles aquisitions ont été comme suit: en 1722 l'état vraisemblable de la population étoit de 14 millions, après 20 ans:

en 1742	16	millions,	après	20	ans.
en 1762	19	—	—	—	—
en 1782	28	—	—	14	—
en 1796	36	—	—	10	—
en 1806	41	—	—	—	—

Cette étonnante progression dans le total de la population est en grande partie provenue des nouvelles aquisitions. Il seroit intéressant de pouvoir déterminer *environ les progrès de la population russe* indépendans des pays conquis.

Nous admettons pour la petite Russie et pour les provinces baltiques le nombre connu par les dénombremens de 1755, de 1768 et de 1773, qui donne un total de 1,696,586 individus; et nous y ajoutons les nouvelles aquisitions depuis 1773 selon les données publiées par le Général Opperman sur sa Carte de 1796, faite par ordre du Gouvernement pour indiquer les nouvelles limites. Selon cet auteur la Russie aquit par la premiere division de la Pologne en 1773

1,226,966 individus des deux sexes,

par la paix avec la Porte ottomane en 1774 et en 1783

171,610 —

par la paix avec la même puissance en 1791

42,708 —

par le second partage de la Pologne en 1793

3,745,663.

par la reunion de la Courlande

387,922

et enfin par la dernier partage de la Pologne en 1795

1,407,402.

total des aquisitions depuis 1773

6,982,271,

joint au nombre précédent pour les provinces baltiques et la petite Russie

8,678,857.

Voila les nouvelles aquisitions jusqu'en 1795.

Mais c'étoient des premiers denombremens et parconséquent très imparfaits, les denombremens faits jusqu'en 1804 doivent être plus justes malgré les imperfections qui existent encore. D'ailleurs l'administration a du avoir une grande influence surtout après l'organisation des Gouvernemens en 1775. Il sera donc interessant de connoître l'effet de ces causes d'après le dernier dénombrement detaillé que je posséde de l'année 1804.

La petite Russie comprend les Gouvernemens de Kiew, de Tschernigow, de Pultawa, de Slobod-Oukrainskoi et en partie de Catherinoslaw et de Koursk, auxquels on doit ajouter les terres des Cosaques du Don comme peu-

pleés par des habitans de la petite Russie. Toute cette vaste contrée étoit le pays limitrophe contre les Turcs et les Tatares nommé l'*Oukraine*. Voici les états de sa population en 1804.

Gouvernemens	Hommes.	Femmes.
Kiew	574,217	538,404
Tschernigow	534,712	538,570
Pultawa	713,772	732,639
Slobod-Oukrainskoi	420,304	418,781
Catherinoslaw	210,815	183,363
Cosaques du Don	161,100	194,521
	2,614,920	2,606,278
	5,221,198.	

Les *provinces Suédoises* sont : une partie de la Carelie et l'Ingrie, aujourd'hui le Gouvernement de St. Pétersbourg la Finlande, l'Esthlande et la Livonie ; leur population étoit en 1804.

Gouvernemens	Hommes	Femmes.
St. Pétersbourg	268,748	270,920
la Finlande	94,397	87,993
l'Esthlande	107,357	105,591
la Livonie	290,014	295,443
	760,516	759,947
	1,520,463.	

Nombre total pour les provinces Suèdoises et pour la petite Russie 6,741,661 individus des deux sexes.

En comparant ce nombre avec celui des dénombremens précédens on voit que la population a gagnée un quart dans les provinces Suèdoises et qu'elle a presque doublée dans la petite Russie, car il est sûr qu'on n'a point compris dans ce dernier denombrement toutes les provinces qui appartiennent à la petite Russie dans le sens le plùs étendu.

Les *provinces polonoises* aquises depuis 1773 jusqu'en 1795, inclusivement la Courlande, sont: la Russie blanche, la Lithuanie et l'Oukraine polonoise, ou les Gouvernemens de Minsk, de Witebsk et de Mohilew, de Grodno et de Vilna, de la Podolie et de la Volhynie. Voici l'état de leur population en 1804.

Gouvernemens	Hommes	Femmes.
Minsk	431,586	426,940
Vitebsk	343,716	330,624
Mohilew	403,614	397,381
Grodno	300,278	290,782
Vilna	465,224	460,046
la Podolie	579,215	556,870
la Volhynie	564,586	522,182
la Courlande	191,910	189,366
	3,280,129	3,174,191
	6,454,320.	

D'après les données du Général Opperman l'état de la population montoit en 1796 dans ces mêmes provinces à 6,767,953. On voit que la population dans les provinces Polonoises n'a pas fait des progrès.

Les *provinces Turques* sont : Cherson, la Tauride, les terres des Cosaques de la mer noire et le reste de Cathérinoslaw, auxquelles on peut ajouter la Caucasie.

Gouvernemens	Hommes	Femmes
Cherson	145,814	124,321
la Tauride	102,826	88,864
les Cosaques de la mer noire	20,240	9,155
la Caucasie	34,849	29,240
	303,729	251,580

555,309.

Les Cosaques de la mer noire ont très peu de femmes, ils tiennent encore beaucoup des coutumes de leurs ancêtres, des fameux Saporogues, cette donnée est très juste. Selon le Général Opperman on comptoit dans les provinces turques aquises en 1774, 1783, 1791: 214,318 individus des deux sexes. Cette petite population sur un terrain immense s'est accrue assurement par une administration plus régulière, mais pas tant qu'il paroit au premier coup d'oeil, car il faut décompter les Cosaques de la mer noire, la Caucasie et les Colons russes et étrangers domiciliés dans ces contrées. Encore faut-il ajouter quelque chose à la somme totale du Général Opperman vu l'imperfection d'un premier dénombrement.

L'état connu de la population dans les provinces aquises depuis 1773 a donc été en 1804 :

dans la petite Russie	5,221,198	individ. des deux sexes
dans les provinces Suédoises	1,520,463	— — — —
dans les provinces Polonoises	6,454,320	— — — —
dans les provinces Turques	555,309	— — — —
	13,751,290.	

D'après ces données il faut déduire du total de la population de la Russie pour les provinces aquises :

1,033,533	du total de	14	millions	en	1722,	reste	12,966,467
1,355,110	— —	16	—	—	1742	—	14,644,890
1,696,586	— —	19	—	—	1762	—	17,303,414
8,678,857	— —	28	—	—	1782	—	19,321,143
13,751,290	— —	36	—	—	1796	—	22,248,710
13,751,290	— —	41	—	—	1806	—	27,751,290

Ce dernier titre est l'échelle des progrès de la population de l'intérieur.

D'où il s'ensuit que la population de la Russie sans les conquêtes depuis le tems de *Pierre* le Grand a gagné en 20 ans depuis 1722 — 1742 — 1,678,423,

par an 83,921 individus des deux sexes,

en 20 ans depuis 1742 — 1762 — 2,658,524,

par an 132,926, c'est - à - dire 49,005 plus par an que dans la premiere période, en 20 ans depuis 1762 — 1782 — 1,676,253,

par an 83,812, moins 49,114.

en 14 ans depuis 1782 — 1796 — 2,927,567,
par an 146,378, plus 62,566.
en 10 ans depuis 1796 — 1806 — 5,000,000,
par an 200,000, plus 53,622.

Nous voions par le tableau précédent que la population de l'ancienne Russie s'est *plus que doublée* ou qu'elle est actuellement à ce qu'elle étoit en 1722 comme $2\frac{1}{5}$ à 1. Et nous voïons par ce dernier tableau que *les progrès* de la population *n'ont pas été uniformes*, qu'elle a eu des hausses et des baisses, que les périodes les plus heureuses pour la population ont été le regne de l'Impératrice *Elisabeth* depuis 1741 jusqu'en 1761 et les années de paix de l'Impératrice *Cathérine II.* depuis 1782 jusqu'à 1796. La population fait encore des progrès dans la dernière période, mais ces progrès sont plus lents. *Quelles pourroient avoir été les causes de ces différens phénomènes?*

La population de la Russie a plus que doublée depuis le tems de *Pierre* le Grand dans l'espace d'un siècle, tandis que *Smith* suppose que la population ne double dans les pays cultivés depuis long-tems que dans l'espace de cinq siècles *). Elle a doublée surtout par une

*) *Smith* Recherches T. I. Ch. 8. p. 106.

Administration mieux ordonnée, par la sureté que le Gouvernement a procuré à la nation, par les capitaux étrangers qui ont été placés en Russie et qui faisoient longtems l'ame de son commerce de l'intérieur, par les progrès de l'industrie nationale qui en étoit la suite, par les progrès des lumières repandues tant par les nouvelles liaisons de commerce avec les autres nations cultivées de l'Europe que par les moïens d'instruction que le Gouvernement a offert aux habitans de la Russie, enfin par l'éloignement de plusieurs obsctacles qui s'opposoient aux progrès de l'industrie, comme l'abolition des douanes dans l'intérieur sous l'Impératrice *Elisabeth* et *Catherine II*, l'amélioration des grands chemins et la multiplication des canaux.

Quel triste tableau nous offre la Russie dans le 15me, dans le 16me et 17me siècle. *Josafa Barbaro* en 1436 rapporte que depuis Moscou jusqu'aux frontières de la Pologne tout étoit desert, les villages brulés et abandonnés n'offroient rien au voyageur qu'un gite pour allumer son feu, *Contarini* 1483 le confirme, *Meyerberg* en 1661 trouva entre Waesma et Mosaisk, sur un chemin de 130 werstes un seul village, le chemin de Smolensk à Moscou étoit dangereux à cause des loups qui attaquoient les voyageurs selon *Lyseck* 1675. *Ulfeld* Ambassadeur danois 1625

trouva le pays dépuis Moscou jusqu'à Novgorod et Plescou tout à fait devasté par les guerres civiles sous *Iwan Wasilewitsch II.*, *Posserin* 1581 — 1582 voyageoit des journées entières dans l'intérieur de la Russie sans rencontrer un homme, tout étoit desert entre Kasan et Astrachan. Même les villes avoient beaucoup souffertes, *Posserin* estime la population de Moscou à 30,000, celle de Novgorod etoit reduite par la peste à 3000 habitans, et Kiew étoit presque en ruines du tems de *Herberstein* 1516 — 1526. Outre les dévastations des guerres civiles et étrangères, la quantité d'impôts et la dureté des Commissaires qui les relevoient depeuplerent mêmes les provinces septentrionales, qui avoient les moins souffertes par les guerres. Entre Wologda et Jaroslaw on comptoit cinquante villages abandonnés selon *Fletcher* 1588. Le pain étoit presque inconnu à Ustiug et sur la Dwina du tems d'Herberstein. La famine et la peste ravageoient souvent les tristes restes de cette population malheureuse, comme en 1525, en 1601 en 1615, la ville de Novgorod perdit dans un seul hiver presque toute sa population, 18,000 individus *).

Ce n'est donc ni aux climats tempéres de la Russie, ni à ses terres fertiles que nous devons attribuer les pro-

*) *Meiners* comparaison de la Russie ancienne et nouvelle 1798. T. I. Ch. 1.

grès rapides de la population dans le 18me siècle, c'est a son Administration mieux organisée, c'est à la sureté qui en résultoit que nous les devons. Un jeune Etat même tolerablement administré et mis en relation avec des Etats cultivés depuis long-tems doit faire des progrès étonnans en culture et en population.

La période du regne glorieux de l'Impératrice *Catherine II*, où elle s'occupa particulièrement d'améliorer l'administration de l'Intérieur, fut surtout heureuse pour les progrès de la population. L'organisation des Gouvernemens en 1775 étoit la grande Institution politique qui procura aux habitans plus de sureté et de bien-être; le Manifeste de 1782 sur la liberté d'exploiter les mines, l'établissement des Ecoles normales en 1783, les droits accordés à la Noblesse en 1785, l'amélioration des grandes routes depuis 1786 et surtout l'établissement de la Banque dans la même année furent autant de mesures pour augmenter le bien-être des citoiens autant que cela dépend du Gouvernement. La Banque eut dans les premières années un effet très heureux sur les progrès de l'agriculture. Cette grande Impératrice éloigna plusieurs difficultés qui s'opposoient au bien-être de ses sujets: manque de liberté industrielle, manque de commu-

nications, manque de lumières et de moyens de circulation.

La population de la Russie a plus que doublée dans le 18me siècle, *peut-on espèrer les mêmes progrès dans le 19me?*

Si l'on ne considère que l'étendue des terres labourables qu'on suppose être de 80,000 milles carrées, on pourroit assurer que la Russie auroit de quoi nourrir 960 millions d'habitans, c'est-à-dire à peu près autant qu'on suppose actuellement sur toute la terre.

Si l'on croit que le surplus des naissances en Russie est un profit tout net pour la population, ce surplus qui est au moins d'un demi million donneroit en 32 ans 60 millions, en 56 80 millions etc.

Mais l'expérience prouve que les progrès de la population ne dependent pas seulement de l'étendue des terres labourables, il y en a qui ne sont pas cultivées dans les pays où l'agriculture a fait les plus grands progrès, même en Angleterre, en Flandres, en Lombardie; ces progrès dependent encore moins du surplus des naissances, partout leur nombre surpasse celui des décès. La population est toujours en rapport avec l'état de la richesse nationale et c'est pour cela que la preuve la plus décisive de la prosperité d'un Etat est l'augmenta-

tion du nombre de ses habitans. En Russie la population a plus que doublée en 84 ans, d'où l'on peut conclure que son agriculture qui est la principale branche de son industrie, a doublée. En France on comptoit sous le regne de *Henri IV*, en 1593, 16 millions d'habitans et sous *Louis XV* 1723, 25 millions. L'état de la population n'a pas même doublé en 130 ans puisque son agriculture etoit languissante, (v. *Arthur Young* et *Du Pradt*) et que son commerce etoit gené par l'Angleterre. La Grande Bretagne au contraire eut en 1758 8 millions d'habitans *), en 1794 on lui donna 12 millions et demi **) et depuis 1804 on lui donne communement 15 à 16 millions. Elle auroit donc gagnée quatre millions en 36 ans et 3 à 4 dans les dernières 10 années. Si ces données sont justes elle auroit eu dans la première période un surplus annuel de 111,000 habitans et dans la dernière un surplus annuel de 300,000, enfin la population auroit presque doublée dans un demi siècle. Ces progrès sont étonnans, mais les progrès de l'industrie en Angleterre ne le sont pas moins, surtout dépuis *Guilleaume III.* sous le-

---

*) *Stuart* Recherche des Principes de l'Economie politique T. I. Ch. XV. p. 172.

**) *Meusel* Statistique, seconde édition de 1794. n. 216.

quel les droits des citoyens furent mieux éclaircis et irrevocablement fixés. Pourtant les progrès de la population angloise ne sont pas inouis, car *Smith* *) avoue lui même que dans les Colonies angloises de l'Amérique septentrionale ou dans les Etats-Unis, la population double en 20 à 25 ans, car ici le travail est si productif qu'une famille nombreuse au lieu d'être à charge est la source de l'opulence et de la richesse des parens. Le travail de chaque enfant, jusqu'à ce qu'il puisse quitter la maison paternelle est evalué à 100 livres Sterling. La demande pour trouver des ouvriers et les fonds pour les entretenir augmentent ici plus rapidement que le nombre des travailleurs. Voilà donc différentes échelles sur les progrès de la population, toutes indépendantes de l'étendue des terres labourables et du surplus des naissances, toutes en rapport direct avec les progrès de la richesse nationale qui ont été dans quelques Etats plus lents et en d'autres plus rapides.

D'après ces principes fondés sur l'expérience que faut-il augurer sur les progrès futurs de la population en Russie? — Son Agriculture a gagné infiniment en étendue pendant le 18me siècle, au point que dans les

*) *Smith* l. c. T. I. Ch. VIII. p. 106.

Gouvernemens bien cultivés autour de Moscou elle ne peut plus s'étendre sans la ruine des bois et des prairiés qui restent. Elle pourroit infiniment gagner par des améliorations du terrain, mais les capitaux qu'elles demanderoient ne peuvent s'accumuler que lentement par le commerce, comme le prouvent l'Angleterre, la Flandre et la Lombardie. Donc on ne sauroit espèrer des progrès rapides de l'agriculture en Russie pendant le 19me siècle. Ses Manufactures, sans contredit encore inférieures à celles de l'Angleterre, de l'Allemagne, de la France, sont pourtant suffisantes pour les marchés qu'elles trouvent actuellement dans l'intérieur et en Asie, la production se règle ici sur la demande. Quant aux Manufactures qui travaillent pour l'étranger tout dépend du commerce étranger, et ce commerce a été fait quant à l'extérieur par des étrangers et dans l'intérieur par les russes avec les fonds étrangers. Les progrés du commerce russe dependent de la paix et des progrés des lumières. D'après toutes ces considérations on ne sauroit espèrer des progrès aussi rapides de la richesse nationale et parconséquent de la population pendant le 19me siècle qu'on les a vu pendant le 18me.

L'expérience a prouvé ce raisonnement. Les progrès de la population deviennent plus lents depuis la 5me Re-

vision, le surplus annuel de 60,000 habitans a été reduit à 50,000 dans les dernières dix années.

Pour constater ce fait j'ai comparé les états sur la population de 25 Gouvernemens de l'ancienne Russie, où le surplus des naissances est le plus considérable, selon la 4[me] Revision de 1782 avec les états sur la population selon la 5[me] Revision de 1796, et enfin avec le denombrement général de 1804. Ces Gouvernemens étoient: Moscou, Tula, Kalouga, Jaroslaw, Orel, Koursk, Wladimir, Resan, Pensa, Kasan, Twer, Smolensk, Tambow, Nigegorod, Plescou, Woronesch, Simbirsk, Kostroma, Waetka, Novgorod, Saratow, Perm, Orenbourg, Wologda, Olonetz, et voici les résultats:

Les états sur la population dans ces 25 Gouvernemens donnent d'après la 4[me] Revision de 1782 9,360,799 individus mâles.

Selon la 5[me] Revision de 1796 14 ans après 10,228,672.

Selon le denombrement général de 1804, 8 ans après 9,989,531.

Donc la population auroit gagnée dans la première période 867,873 et elle auroit perdue dans la seconde 239,141.

Dans la première période il n'y a que trois Gouver-

nemens dont la population ait perdu: Kalouga, Kostroma et Woronesch, tous les autres ont gagné. Mais dans la seconde il n'y a que Moscou qui a considérablement gagné, savoir 100,000 individus mâles, puis Woronesch qui avoit perdu auparavant, a gagne 150,000 hommes, enfin Waetka 37,000. Koursk et Orel ont quelques milliers de plus, Toula, Jaroslaw et Perm quelques centaines, les autres 17 Gouvernemens ont tous perdus et quelques uns considérablement comme Tambow 88,000 individus mâles, Nigegorod 55,000, Simbirsk 110,000 en huit ans! —

Il est à remarquer que les Gouvernemens cultivés depuis long-tems, comme Toula, Jaroslaw, Kalouga, Twer, Plescou, Kostroma, Smolensk, Wladimir, ont très peu gagné et très peu perdu, la population et parconséquent l'industrie se trouvent d'après cette donnée dans un état stationaire. Les Gouvernemens moins cultivés Waetka et Woronesch ont beaucoup gagné et les Gouvernemes les plus riches en bled comme Tambow, Nigegorod, Simbirsk ont le plus perdu.

Les progrès rapides de la population depuis la 4me jusqu'à la 5me Revision sont l'effet naturel des progrès sensibles que l'Agriculture à fait par nombre de bonnes

institutions et surtout par la Banque. Ces institutions et ces nouveaux fonds ont produit leur effet, aprésent les anciennes sources de la richesse nationale coulent moins abondamment et il n'est pas facile d'en ouvrir de nouvelles. Je presume donc que la population de la Russie s'arretera long-tems au total actuel entre 41 et 43 millions d'habitans. Pourtant des circonstances extraordinaires pourroient donner au midi de la Russie une population plus considérable, comme le commerce étonnant en bled à Odesse dépuis 1800 jusqu'en 1805, alors toutes les terres jusqu'à Kiew gagnerent en prix, mêmes les Steppes fertiles furent cultivées, on manquoit d'ouvriers, on offroit jusqu'à la moitié de la recolte pour trouver des moïens de récueillir l'autre. Le commerce de Taganrok donne aussi de belles esperances, enfin l'agriculture paroit faire quelques progrés parmi plusieurs peuples nomades.

Un Etat est *suffisament peuplé* quand ses habitans sont pour la plupart à leur aise. Cette population est la seule qu'on puisse désirer, la seule qui soit utile au Gouvernement. Un Etat n'est pas suffisament peuplé quand la demande et les fonds pour les ouvriers surpassent leur nombre, comme dans quelques provinces méridionales de la

Russie. Un Etat souffre de sa population quand des milliers de riches doivent nourrir des millions de pauvres. Cette population abusive doit ou perir ou sortir de l'Etat ou causer des Revolutions.

La Russie dans ses anciennes provinces ne connoit pas des mendians. La petite noblesse qui est la plus nombreuse vit à son aise à la campagne; ce sont les véritables fermiers de la Russie, leur existence depend des progrès de l'agriculture et elle prospère sans contredit sous leurs yeux. Les paysans russes sont bien loin d'être malheureux, ils sont en général plus à leur aise qu'en France du tems de Lady *Montagu* qui ne rencontroit que des mendians depuis Lyon jusqu'à Paris. Même le nombre des paysans riches est fort considérable et il le doit devenir tous les jours plus tant qu'ils conserveront la simplicité de leurs moeurs antiques. Leurs épargnes s'accumulent nécessairement en capitaux, et ces capitaux deviennent peu-à-peu productifs, car beaucoup de paysans ont deja abandonné l'agriculture et s'occupent des autres branches de l'industrie, des arts et métiers et même du commerce. Il n'y a que la Finlande et les provinces polonoises où les paysans soient pauvres.

La puissance d'un Etat n'est pas uniquement fondée sur le grand nombre des habitans, mais encore *sur leur aisance et sur leur activité*. La Russie n'a pas à se plaindre à cet égard. Elle est suffisament peuplée pour l'état actuel de sa richesse nationale. Que ne deviendroit cet Empire si sa population étoit plus concentrée? —



SUR LA REPARTITION DU NOMBRE TOTAL DES HABITANS DE LA RUSSIE.

PAR

C. T. HERRMANN.

Présenté à la Conférence le 3 Oct. 1810.

Première partie.

Repartition selon les nations.

La donnée sur la totalité de la population nous fait connoitre les *forces physiques* de l'Etat, sa répartition nous fait juger de ses *forces morales.*

Ceux qui sont d'une même *Origine* parlent ordinairement la même langue et ont les mêmes moeurs et coutumes. Ils se comprennent, ils se ressemblent et se regardent comme membres de la même famille. Plus qu'un peuple est sauvage ou barbare et plus cette différence nationale influe sur ses prejugés contre les étrangers. Il est bien difficile au Gouvernement d'effacer ces traits caractéristiques pour établir l'unité indispensable dans un corps politique composé de différentes nations. Les progrès des lumières affoiblissent certainement l'effet de ces différences nationales et c'est pour cela que les premieres

classes de toutes les nations se ressemblent beaucoup, mais les lumières ne se répandent que difficilement jusqu'aux dernières classes des citoiens. Les Gouvernemens les plus éclairés ont taché de faire disparoitre ces différences. La Russie a de tout tems suivi ce grand principe de politique, la nouvelle division de la France avoit particulièrement ce but, l'Angleterre a enfin reçu les Ecossois et les Irlandois dans son Parlement.

La *Réligion* a eu long-tems une influence marquée sur la politique. Depuis la fin du quinzième siècle jusqu'à la fin du dix-septième le caractère de la politique des Cabinets étoit réligieux, le dix-huitième siècle porte le caractère du système mercantil et le dix-neuvième celui des révolutions. Plusieurs Gouvernemens ont proclamé le principe de la tolérance, mais en quelques Etats elle est politique sans être réligieuse, en d'autres réligieuse mais non politique et ce n'est qu'en France, qu'en Russie et qu'en Prusse qu'elle porte ce double caractère.

La répartition selon *les états* est actuellement une des plus intéressantes données statistiques. L'agriculteur est attaché à son champ, c'est sur cette terre qu'il a accumulé son travail et le fruit de ses épargnes. Cette terre est l'unique source des richesses et parconséquent le propriétaire de terre devient insensiblement le maitre

absolu de celui qui n'en a point. Les Manufactures et le commerce ouvrent une nouvelle source de richesse, indépendante de la propriété territoriale. Une troisième classe de citoïens vient se placer entre l'ouvrier de l'Agriculture et le propriétaire de la terre. On la nomme à juste titre le tiers-état, elle appartient au monde entier, les lumières et les arts qui aiment la liberté, l'aisance et la tranquillité se repandent avec la plus grande facilité dans cette classe. Le manque de tiers-état arreta les progrés des lumières parmi les peuples slaves, et les peuples germaniques ne furent plus heureux, malgré leur système féodal, que puisqu'ils avoient cette classe intermédiaire quelques siècles plûtot. La noblesse et le clergé sont des corps politiques entre le Souverain et la nation. Leur nombre, leurs propriétés, leurs privilèges, meritent la plus grande attention pour juger des forces morales dans les Etats monarchiques. Enfin les grandes Armées ont établi un système militaire au milieu de la paix. Ce système perfectionné dépuis *Louis XIV.* et *Fréderic II.* a desorganisé les finances et bouleversé plusieurs Etats.

Autrefois il y avoit plus d'Etats en Europe où le pouvoir souverain étoit limité par des privilèges. Ces provinces qui avoient conservé *des droits particuliers* ren-

doient quelquefois les opérations du Gouvernement plus lentes et plus difficiles.

L'*Origine*, la *Réligion*, les *états* et les *droits particuliers* sont donc les principaux points de vue sous lesquels nous allons considérer le nombre total de la population en Russie.

Répartition selon les nations.

L'Ethnographe fait des recherches sur l'Origine des peuples et la moindre peuplade fait alors classe à part dèsqu'il lui trouve des différences nationales.

Le Statisticien politique ne s'occupe de ces différences que lorsqu'elles peuvent avoir une influence majeure sur le bien-être de l'Etat.

Sous le premier point de vue la Russie a presque une centaine de nations, d'après le second la Russie européenne n'a que trois nations, les peuples *Slaves*, *Finois* et *Tatares*. On pourroit ajouter les habitans du Caucase mais ils ne sont pas nombreux. La Sibérie a outre les peuplades *Finoises* et *Tatares* encore les *Samojèdes* et les peuples de race *Mongole* et *Américaine*. C'est une population naissante.

1. Le Centre de la Russie européenne est habité par *les Russes*, a l'Ouest et au Sud-Ouest se trouvent

les Polonois. Nous ne multiplieront pas inutilement les sousdivisions des peuples Slaves en habitans de la grande et de la petite Russie, en Cosaques, Serbes, Wlaches, Albanois, Arnautes, Bulgares etc. qui se trouvent comme étrangers ou colons dans les Gouvernemens du midi. Que de sousdivisions de ce genre ne pourroit-on faire en France et en Angleterre?

2. Tout le Nord de la Russie depuis la Finlande, par Archangel, Olonetz, Pétersbourg, Novgorod, Wologda, Waetka et Perm est habité par des *peuples Finois.* Leurs tribus nombreuses se sont repandues à l'Ouest et à l'Est, a l'Ouest par l'Esthlande et la Livonie jusqu'en Courlande, à l'Est par Kasan, Nigegorod, Simbirsk, Resan, Tambow, Orenbourg, Saratow. Ils ont passé l'Oural et se sont étendus dans le Gouvernement de Tobolsk.

3. Les *peuples Tatares* occupent le midi de la Russie et de la Sibérie; Tatares de Kasan, d'Astrachan, de la Crimée, du Caucase; Tatares de Tobolsk, du Tschoulym, Buchares, Teleutes, Abinzes sur l'Ob, le Tschoulym et le Tom; Tatares étrangers de Chiwa, de la Perse, du Turquestan; Nogaens en Crimée et sur le Couban, Baschkires, Metscherjacques et plusieurs autres peuplades melées de Tatares et de Finois.

Les habitans du Caucase sont classe à part, mais surtout pour l'Ethnographe.

1. Les *Samoièdes* sont la premiere nation de la Sibérie septentrionale. Leurs tribus se prolongent depuis la mer glaciale le long du Jenisei jusqu'au Baikal et s'étendent depuis l'Ob fort au loin dans la partie orientale du nord de la Sibérie.

2. Leurs voisins sont les *peuplades Américaines*, les Tsuktsches, les Kamtschadales, et les habitans des Archipels Aleoutes et Couriles.

3. Au Sud de la Sibérie se trouvent différentes peuplades de race *Mongole.*

La donnée sur la répartition de la population de la Russie selon les nations ne sauroit être indiquée avec la même exactitude comme en Autriche, où les différentes nations ont différens droits et priviléges. Le Gouvernement russe ayant accordé à tous ses sujets les mêmes droits et leur ayant imposé les mêmes devoirs, ne demande jamais aux Gouverneurs des renseignemens sur les différences nationales et parconséquent les états sur la population de 1796, de 1803 et 1804 et plusieurs autres Rapports particuliers que j'ai pu consulter ne font pas connoitre cette donnée, leurs principes de division sont financiels et militaires. Les états sur la population de la

Sibérie ont plus de ces données, puisqu'elles y sont nécessaires sous des rapports financiels. Je dois repeter ici que tous mes calculs se bornent aux états sûr des denombremens faits par ordre du Gouvernement, qui sont toujours les plus vraisemblables. Je connois bien leurs imperfections, mais je connois aussi le vague de tous les autres calculs.

La question la plus intéressante est: a combien peut-on évaluer, avec autant d'exactitude que la nature du sujet et la nature des sources le permettent, *les nations non-russes?*

I. *Les Polonois:*

La Pologne avoit en 1772 selon les recherches du Comte *Tschatzki*, savant auteur Polonois, une population de quatorze millions. La Pologne fut entièrement partagée pendant 23 ans entre l'Autriche, la Prusse et la Russie.

a) La Galicie revint a l'Autriche. Cette province se divise en occidentale et en orientale avec la Bukowine. Un denombrement fait en 1807 donne à la Galicie occidentale 646,712 hommes

660,550 femmes

1,307,262 habitans,

à la Galicie orientale avec la Bukowine

1,863,904 hommes
1,922,004 femmes
3,785,908 habitans.

Somme totale 2,510,616 hommes
2,580,554 femmes
5,091,170 habitans.

b) La Prusse eut dans les Départemens de Lithuanie, de Posen, de Kalisch de Varsovie, de Bialystok et et de Plotz 537,074 habitans des Villes
2,035,615 habitans des Campagnes
2,572,689 habitans.

c) La Russie eut selon le Général Opperman en 1796 au premier partage de la Pologne en 1773
1,226,966 habitans des deux sexes,
au second de 1793 3,745,663 — — — —
au troisième de 1795 1,407,402 — — — —
6,379,031 habitans.

Ces provinces forment actuellement sept Gouvernemens: Vitebsk et Mohilew ou la Russie blanche, Vilna et Grodno ou la Lithuanie, Minsk, la Volhynie et la Podolie. La Russie blanche fut aquise en 1773, les autres Gouverne-

mens en 1793 et ils furent augmentés au dernier partage de 1795.

Les états sur la population de ces Gouvernemens que j'ai pu consulter sont :

Vitebsk et Mohilew	736,376	hommes
Vilna et Grodno	796,633	—
Minsk . .	576,027	—
la Volhynie .	568,578	—
la Podolie .	576,027	—
	3,253,641	hommes.

Ce tableau ne contenoit point les femmes.

2) deux tableaux sur le nombre total des habitans faits en 1803 et en 1804 au Ministère de l'Intérieur.

Vitebsk	302,286	hommes	en 1803 somme totale
	297,410	femmes	599,696
	343,716	hommes	en 1804 — 674,340
	330,624	femmes	différence : 74,644.
Mohilew	403,219	hommes	en 1803 — 800,459
	397,240	femmes	
	403,614	hommes	en 1804 — 800,995
	397,381	femmes	différence : 536.
Vilna	470,064	hommes	en 1803 — 925,207
	455,143	femmes	

	465,224 hommes 460,046 femmes	}	en 1804 — 925,270 différence : 63.
Grodno	300,278 hommes 290,782 femmes	}	en 1803 — 591,060.

Le même nombre se trouve repeté dans le tableau de 1804.

Minsk	438,455 hommes 429,938 femmes	}	en 1803 — 868,393
	431,586 hommes 426,940 femmes	}	en 1804 — 858,526 différence : 9,867.
Volhynie	563,700 hommes 519,836 femmes	}	en 1803 — 1,083,536
	564,586 hommes 522,182 femmes	}	en 1804 — 1,086,768 différence : 3,232.
Podolie	555,499 hommes 536,526 femmes	}	en 1803 — 1,092,025
	579,215 hommes 556,370 femmes	}	en 1804 — 1,136,085 différence : 44,060.

Somme totale de 1803 3,034,501 hommes
2,926,875 femmes
5,961,376 habitans.

Somme totale de 1804	3,088,219	hommes
	2,984,825	femmes
	6,073,044	habitans.

D'après ces données la population auroit gagné 111,668 habitans mais il est plus vraisemblable que cette augmentation est l'effet des dénombremens repetés. La différence entre la donnée du Général Opperman de 1796 et entre les états sur la population de 1804 est grande savoir de 305,987 habitans des deux sexes. Ordinairement les premiers denombrement donnent les plus petites sommes, ici nous voyons le contraire. Il se pourroit qu'il y auroit eu dans les premières annéns une émigration sourde comme cela est arrivé en Tauride, évenement assez ordinaire dans les pays nouvellement occupés. Mais encore la différence paroit trop grande. Une remarque qui se trouve à ces états ministériels de 1803 et 1804 dit: le nombre effectif des habitans est plus grand qu'il n'est marqué dans ces états, car on a trouvé que les nombres indiqués par les Gouverneurs ne passent pas de beaucoup le nombre de ceux qui sont compris dans la Revision. On peut hardiment ajouter à chaque Gouvernement 20,000 habitans et plus.

En ajoutant donc pour les sept Gouvernemens 140,000

habitans le nombre total de 1804 seroit 6,213,044 qui diffère de 164,987 du nombre indiqué en 1796.

D'après ces données l'Autriche a eu dans ses provinces polonoises: 5,091,170 habitans.

La Prusse	2,372,689	—
La Russie	6,213,044	—
	13,876,903	—

Vu l'imperfection des dénombremens on peut supposer en nombre rond quatorze millions, nombre que le Comte *Tschatzki* indiqua en 1772, d'où il resulte que la population de la Pologne se trouve dans un état stationaire.

La Russie a reçu par la paix de Tilsit et de Vienne environ 600,000 nouveaux sujets polonois, donc le nombre total des Polonois en Russie montre vraisemblablement a 6 millions 800,000 habitans des deux sexes.

II. *Peuples de race Finoise:*

a) Habitans de *l'ancienne Finlande russe.* On comptoit à la quatrième Revision de 1782

93,234	hommes
93,266	femmes
186,500	habitans.

parmi lesquels 64,543 paysans à la Couronne et 2,207 aux particuliers, somme totale des paysans 66,750.

À la cinquième Revision 1796 il y eut

92,684 hommes,

parmi lesquels 57,379 paysans à la Couronne, 2,028 aux Domaines et 30,000 aux particuliers, somme totale 89,447.

Un denombrement partiel de 1797 donna 89,188 paysans.

La première Commission pour les affaires de la Finlande établie le 19 Mai 1803 indiqua 64,074 paysans à la Couronne et 28.000 aux particuliers, somme totale 92,074. Cette donnée paroit la plus exacte.

Les états sur la population totale presentés au Ministère de l'Intérieur diffèrent très peu de cette donnée. Ils rapportent en 1803

en 1803	92,195	hommes
	90,196	femmes
	182,391	habitans,
en 1804	94,397	hommes
	87,993	femmes
	182,993	habitans.

La premiere donnée est évidement celle des paysans revisionaires et confirme la remarque susmentionnée. Car à la cinquième Revision 1796 on trouva 3,247 hommes dans

les autres Classes, savoir du Clergé 327, de la Noblesse 531, des personnes libres non comprises dans les autres classes 117, marchands 408, artisans 1854. On ne sauroit précisement doubler ce nombre pour les femmes, puisque tous les tableaux prouvent que le nombre des femmes est inférieur à celui des hommes, mais on pourra toujours ajouter 6000 à la population de 1803. La donnée de 1804 est aussi imparfaite, mais elle approche plus de la verité.

Comme il y a peu de russes en Finlande on pourra supposer 182,000 Finois dans ce Gouvernement d'après la donnée de 1803.

Un denombrement fait en Suède en 1805 donne à la *Finlande ci-devant Suédoise* 895,773 habitans des deux sexes, savoir: Noblesse 2,534,

Clergé 4,019,

Bourgeoise 11,454,

Paysans 713,285,

personnes non comprises parmi ces classes 164,480.

Somme totale des Finois de l'ancienne et de la nouvelle Finlande 1,077,773 individus des deux sexes.

b) Les *Ischores* ou Finois de l'Ingrie font la grande

majorité des habitans des campagnes dans le Gouvernement de St. Petersbourg.

À la cinquième Revision il y avoit dans ce Gouvernement 122,913 paysans aux particuliers,
14,678 aux domaines,
30,827 à la Couronne;
168,418.

Un tableau sur la ferme de l'eau de vie en 1803 rapporte presque le même nombre quoique autrement reparti: 123,055 paysans aux particuliers,
1,421 aux domaines,
43,558 à la Couronne;
168,034.

Un autre tableau sur la repartition du sel marque 168,602 paysans.

Les états sur la population générale de ce Gouvernement donnent pour 1803 le nombre des revisionaires
168,900 hommes
170,989 femmes
339,889 habitans.

La donnée de 1804 (à l'exclusion de la Capitale) est plus exacte, savoir 268,748 hommes,
270,920 femmes,
539,668 habitans.

D'où il resulte qu'on peut estimer le nombre des Ischores du Gouvernement de St. Petersbourg à 330,000 individus des deux sexes.

Les Ischores habitent le nord du Gouvernement de Novgorod. On évalue leur nombre dans le cercle de Tichwin à 15,000 hommes, dans le cercle de Belosersk à 10,000 et dans le cercle de Kirilow environ à la même somme. Il y auroit donc dans ce Gouvernement environ 35,000, ou à-peu-près 70,000 des deux sexes.

Les Ischores ou plutôt Finois de la Carelie étoient les anciens habitans du Gouvernement d'Olonetz. Actuellement ils ne font qu'un tiers de la population des campagnes, qui étoit d'après un tableau sur la répartition du sel de 1804 91,482 mâles, donc il y auroit au tiers environ 30,000 Ischores ou 60,000 des deux sexes tout au plus.

D'après ces données l'évaluation la plus vraisemblable sur le nombre des Ischores seroit

330,000	Ischores de St. Petersbourg
70,000	de Novgorod
60,000	d'Olonetz
460,000	individus des deux sexes.

c) Les *Lappons* d'Archangel font 1200 familles ou environ 4800 individus. Ce nombre n'est pas trop fort

vu l'imperfection des denombremens des peuples nomades.

d) Les *Esthes*, peuple de raçe finoise se sont repandus en Livonie. Les Lives, anciens habitans du pays sont en très petit nombre sur la petite rivière Salis, ils se sont perdus parmi les Lettes, peuple slave, et parmi les Esthes. Il y avoit de ces derniers dans le cercle de Walk environ 2000 màles, dans le cercle de Werroe 28,394 dans les campagnes, et 126 dans la ville, à-peu-près 10,000 dans les Campagnes du cercle de Dorpat et 1625 dans la ville, 18,388 dans le cercle de Fellin et 76 dans la ville, enfin dans le cercle de Pernau 33,158. Somme totale 93,767 hommes ou 187,534 individus. Ces données ne sont pas nouvelles, mais la population en Livonie ayant fait peu de progrès, car en 1792 il y avoit

	268,891	hommes
	269,580	femmes
	538,471,	
et en 1800	285,493	hommes
	285,421	femmes
	570,914.	

on peut s'en servir toujours comme terme d'approximation.

Quant aux Esthes en Esthlande il y avoit en 1795

93,156 paysans aux particuliers,
1,638 aux domaines,
6,173 à la Couronne,

100,967 hommes.

En 1797 on comptoit 99,484 paysans, presque le même nombre.

En 1803 la totalité de la population étoit de

107,357 hommes
105,591 femmes

312,948 individus.

En doublant la donnée de 1795 on auroit avec les Esthes en Livonie le nombre de 389,468.

e) Les *Syrjaenes*, peuplade de race Finoise dans le Gouvernement de Wologda et de Perme sont très peu nombreux, environ quelques milliers.

f) Les *Permaeques*, les *Wogules* et les *Wotjaeques* sont d'après des tableaux détaillés dans les Gouvernemens de Tobolsk et de Tomsk 2017 hommes, environ 5028 individus.

g) Les *Tschouwasches*, les *Morduanes* et les *Tscheremisses* sont d'après un tableau financiel de 1795 au nombre de 255,826 hommes, savoir 144,006 Tschouwasches, 62,732 Morduanes, 49,088 Tscheremisses ou 511,652 individus.

h) Les *Ostiaques* sur l'Ob, Gouvernement de Tobolsk,
18,691 hommes,
les Tepteri et Bobilei peuplade finoise et tatare dans le Gouvernement de Perm
1,838 hommes,

20,529 hommes ou 41,058 individus.

Le résultat de ces données sur les nations Finoises est:

Finois 1,077,773 individus des deux sexes,
Ischores 460,000,
Esthes 389,468,
Tschuwasches Morduanes et Tscheremisses
511,652,
Permaeques, Wogules et Wotjaeques
1,028,
Syrjaenes tout au plus
3,000,
Lappons 4,800

2,492,779.

On pourra donc évaluer les peuples Finois avec la plus grande vraisemblance à deux millions et demi.

III. *Peuples Tatares.*

a) Tatares de Kasan. Les états sur la population de ce Gouvernement de 1802 portent 47,801 hommes,

nombre approchant de celui que *Georgi* (T. III. p. 363.) marque selon la troisième Revision 1763: 48,712 hommes. Total 95,602 individus.

b) Tatares d'Astrachan. D'après les états sur la population de ce Gouvernement de 1802 les tatares Nomades étoient 6703 Charriots ou familles, tout au plus 26,812 individus, les Tatares domiciliés 9508 hommes. Somme totale 45,828 individus.

c) Tatares de la Crimée et de Ecatherinoslaw, selon *Pallas* (Voyage dans les provinces méridionales de la Russie T. II. p. 347.) 120,000 hommes. Les états sur la population Tatare de ce Gouvernement sont très imparfaits, les Tatares ont trouvé long-tems moiens à se soustraire à la Revision. Donc l'évaluation de Mr. l'Académicien *Pallas* est la plus vraisemblable.

d) Tatares de Perme selon Mr. le Conseiller d'Etat *Bakarewitsch* dans son ouvrage intitulé: Description statistique de la Sibérie ecrite sur les rapports faits au Ministère de l'Intérieur, publié en 1810, 5,629 hommes
Tatares de Tobolsk 25,820 —

31,440 hommes.

e) Tatares du Caucase. Le tableau sur la population de ce Gouvernement de 1802 ne marque que ceux

de Tarkow au nombre de 1200 familles. Il y auroit d'après ces données: Tatares de Kasan 95,602 individus des deux sexes:

d'Astrachan	45,828 individus.
de Crimée et d'Ekatherinoslaw	240,000,
de Sibérie	62,898,
du Caucase; leur nombre est inconnnu jusqu'à	4,800,
	449,128 individus.

Mais comme tous les états sur la population de ces peuples prouvent que le nombre des femmes est inférieur à celui des hommes, il faudroit decompter sur ce nombre environ 30,000. Et alors cet état sur la population tatare seroit conforme à celui que Mr. l'Académicien *Storch* présenta, en évaluant les tatares russes à 200,000 individus des deux sexes, et le nombre de ceux qui furent reunis à la Russie par les traités de paix en 1774, 1783 et 1791 à 214,318, somme totale 414,318 individus.

Peuples de race tatare sont encore les Baschkires, les Metscheraeques, les Boucharzi et Taschkinzi, les Jakoutes et les Kirgises.

Selon les états presentés sur la population de ces peuples au Ministère de l'Intérieur en 1802 et en 1803

il y avoit de Baschkires et Metscheraeques dans le Gouvernement de Perme : 13,508 hommes,

Boucharzi et Taschkinzi, Gouvernement de Tobolsk et de Tomsk . 2,895,

Jakoutes de Tobolsk 258,

Jakoutes d'Irkoutsk 50,676,

67,337 hommes ou 134,674 individus.

Somme totale des peuples tatares 583,802 individus des deux sexes, dont il faut decompter une somme de 30 à 40,000 pour les femmes, parconsequent le nombre le plus vraisemblable seroit de 550,000 individus.

IV. *Habitans du Caucase* soumis a la Russie. Les états de 1803 portent leur nombre à 37,658 hommes

et à 32,203 femmes

69,861 individus.

Les états de 1804 marquent . 34,849 hommes

29,240 femmes

64,089 individus.

V. *Samojèdes.* Les états de 1802 et 1803 indiquent 3000 familles Samojèdes.

Les peuplades *americaines* sont peu nombreuses. On rapporte dans ces mêmes états :

246 Alioutori,
505 Joukagires,
163 Karagassi,
1,782 Kamtschadales,
1,224 Koraeques,
100 Kouriles,

4,020 hommes ou tout au plus 8,040 individus, avec 12,000 Samojèdes 20,040 individus.

Rien de si imparfait que les dénombremens de ces peuplades au Nord de la Sibérie. Plusieurs ne sont pas même connues et il est arrivé encore cette année 1810 que plusieurs peuplades Jakoutes ont envoyés des deputés à Tobolsk qui portoient leur actes de soumission, car disoiens-ils: nous avons appris que nos frères se trouvent bien sous votre domination. Sa Majesté notre Auguste Empéreur fit remettre à ces deputés des sabres d'honneur comme marque de distinction.

VI. *Peuplades Mongoles et Mantschoux.*

D'après les rapports faits au Ministère de l'Interieur il y avoit: 58,767 Baraetes ou Bratzki,
1,158 Calmuquès de Tobolsk,
50,000 Calmuques d'Astrachan ou 13,000 Charriots,
96 Mongoles,

12,832 Tunguses d'Irkoutzk,
1,998 Tunguses de Tobolsk,
976 Lamuti,
308 Tschapogiri,

et en outre 23,090 individus qui étoient exempts d'impots, environ 140,225 hommes ou 298,450 individus.

Le nombre connu de toutes ces peuplades ne passe guère 300,000 individus.

J'ajoute une donnée générale sur la totalité des peuples nomades en Russie. Il y avoit en 1803 sur les états du Ministère de l'Intérieur : 652,000 hommes,
472,000 femmes,
1,124,000 individus.

Il est prouvé par tous les rapports que toutes ces peuplades manquent de femmes, mais il est aussi vrai que les femmes ne sont pas inscrit dans les registres aussi soigneusement que les hommes, puisqu'elles ne payent pas d'impôts.

De toutes ces données resulte le tableau suivant sur les peuples Non-russes :

Polonois .	6,800,000	individus,
Finois .	2,500,000	—
Tatares .	550,000	—
Caucasiens russes .	60,000	—

Samojèdes et autres peuplades connues de la Sibérie		
	300,000	—
	10,210,000	—

C'est le nombre le plus vraisemblable d'après les états sur la population qu'on a jusqu'aprésent. Mais il faut bien remarquer que tous les états sur la population en Russie n'étant faits que sous des rapports ou financiels ou militaires, sont très exacts quant à ceux qui sont compris dans la classe des revisionaires, mais très inexacts quant aux autres classes et parconséquent leur dernier resultat est toujours au-dessous de l'exacte verité. Et d'après cela on peut compter dans cet Empire 10 millions et demi de sujets Non-russes.

Le nombre des habitans de la Russie marqué dans les états actuels et rectifié par des évaluations vraisemblables est de 41,253,483 individus. Ce nombre est toujours le Minimum.

En prenant les donées ministérielles telles qu'elles sont il y auroit toujours 31,043,483 individus russes et les peuples étrangers soumis à la Russie ne font tant au plus qu'un quart de la population totale, proportion très avantageuse pour la Nation dominante. Les Variations dans les sommes principales ne changeront certainement rien à la proportion.

Et ces trente un millions de russes ont l'avantage inapréciable d'une population concentrée, tandis que les autres nations sont disseminées sur une grande étendue de terrain. La nation russe forme le centre de ce grand Empire, elle habite les provinces les mieux cultivées et les plus favorisées par les communications par terre et par eau, le midi de la Russie commence à se peupler par le surplus de la population russe. Tous ces avantages doublent la force de la nation russe et lui assurent la préponderance la plus décidée.

Fautes à corriger:

Mém. T. II. Hist. page 47.

L'omission de quelques mots dans cet extrait pouvant induire à croire que Mrs. *Krug* et *Lehberg* ayent confondu, dans leur rapport, les deux ouvrages de Mr. le Docteur *Rommel*, dont il y est question, ce qui n'est pas le cas, on avertit qu'il faut lire après „*dédiée à S. M. l'Empereur*" ce qui suit: „au moyen d'une dédicace, employée pour la „seconde fois, (d'abord à la tête d'un ouvrage paru en 1804, sous le ti- „tre: *Caucasianum Regionum etc.* ensuite à la tête d'un ouvrage allemand „sous le titre: *Die Völker des Caucasus u. s. w.*) ils firent un rapport peu „favorable à ce dernier petit ouvrage" et ainsi de suite jusqu'à la fin.

Au reste Mr. le Docteur *Rommel* étant à présent Professeur d'une Université Russe, et par conséquent plus près des sources, d'où il faut puiser la connoissance plus exacte des peuples du Caucase, l'Académie croit qu'on puisse attendre de l'activité de ce savant quelque chose de plus satisfaisant sur cette matière et de plus approchant des grands modèles qu'il s'est efforcé de suivre dans la publication de ses recherches ethnographiques.

Mémoires T. III.

Hist. page 49 ligne 23 au lieu d'Onemescops lisez Anemoscops.
Mém. — 26 — 3 — — $\frac{1}{18}$ — $\frac{1}{16}$

Fig. 1

Fig. 2.

Fig. 4.

Fig. 3.

Fig. 6.

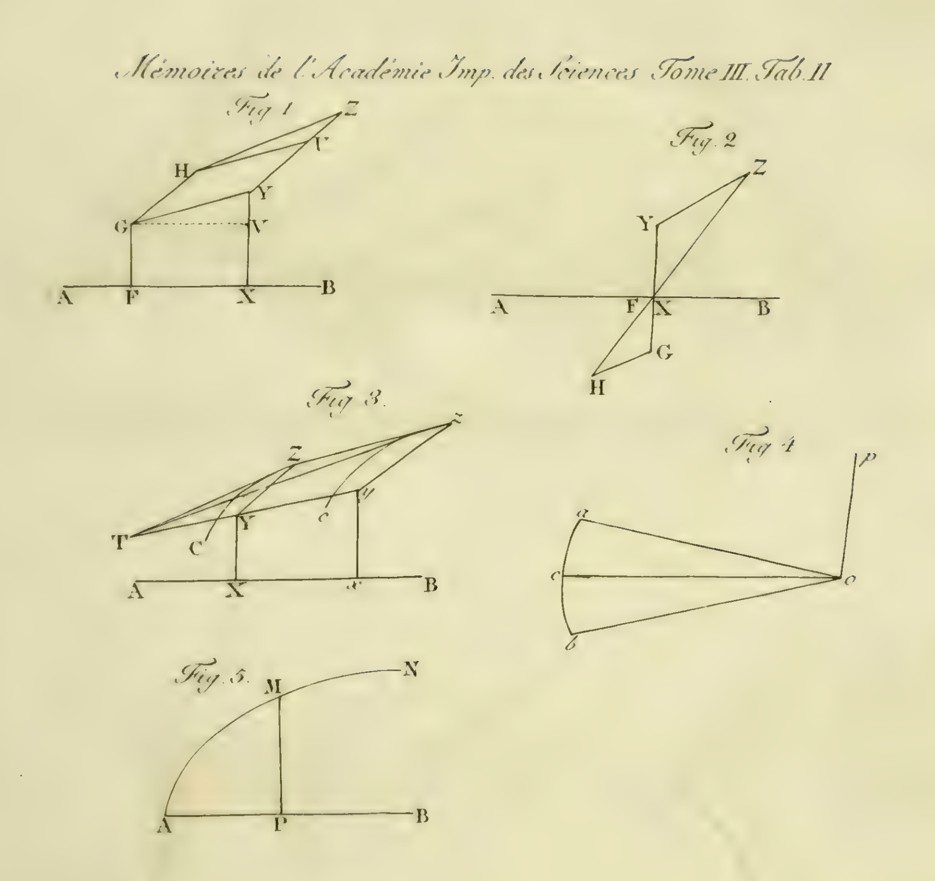

Fig 1
Z
U
H
Y
G
V
A
F
X
B
Fig. 2
Z
Y
A
F
X
B
G
H
Fig 3.
z
Z
y
Y
c
T
C
A
X
x
B
Fig 4
p
a
c
o
b
Fig. 5.
M
N
A
P
B

Fig. I



LILIUM lanceifolium.

Fig. II



LILIUM elegans





LILIUM longiflorum.

[illegible]

Gravé chèz Klauber.





L'I.L.I.U.

...par ...   Gravé chés Klauber.

Fig. I.

LILIUM maculatum.

Fig. II.



LILIUM japonicum.

Dess par

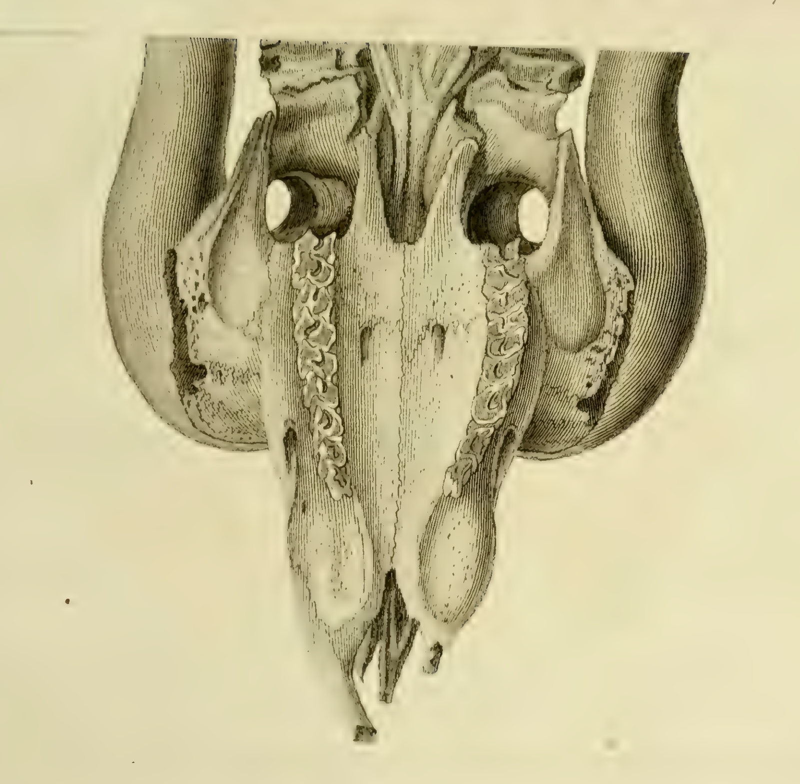
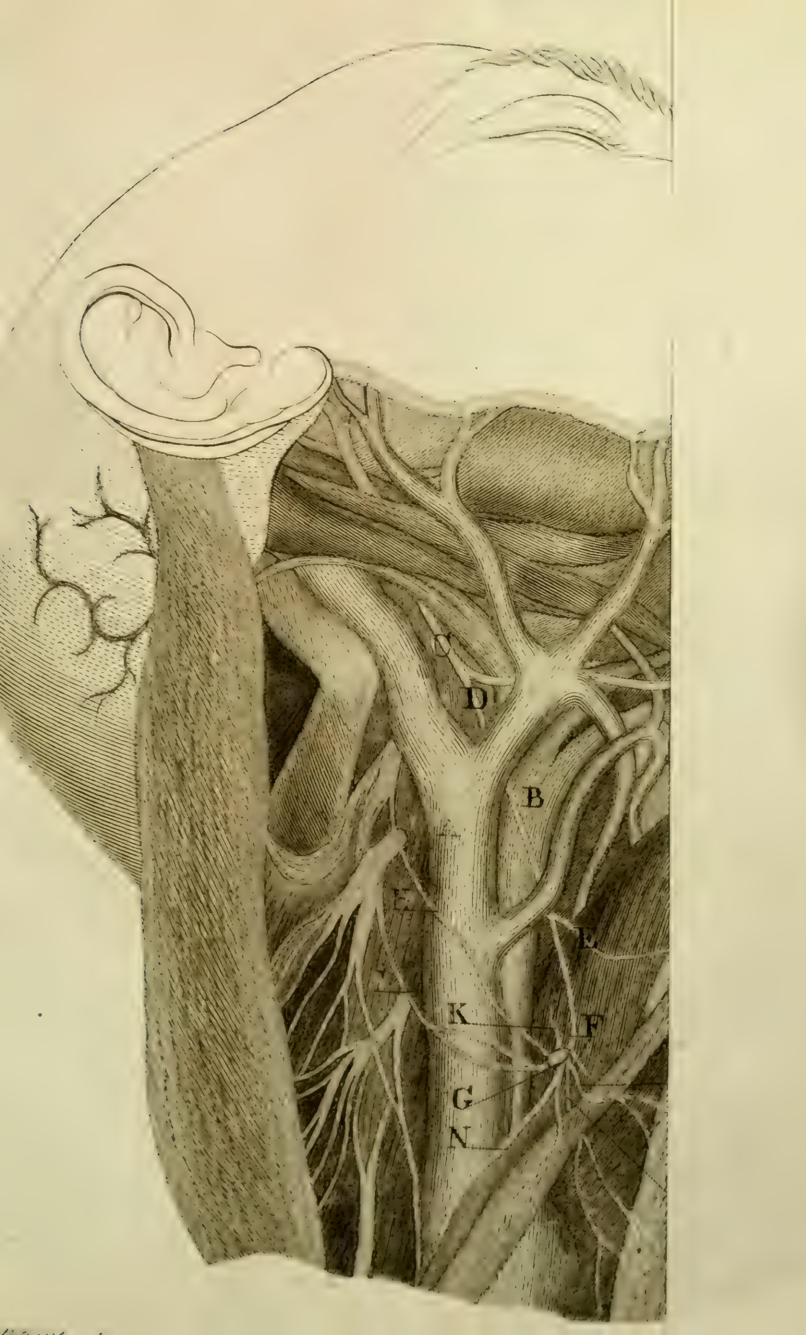
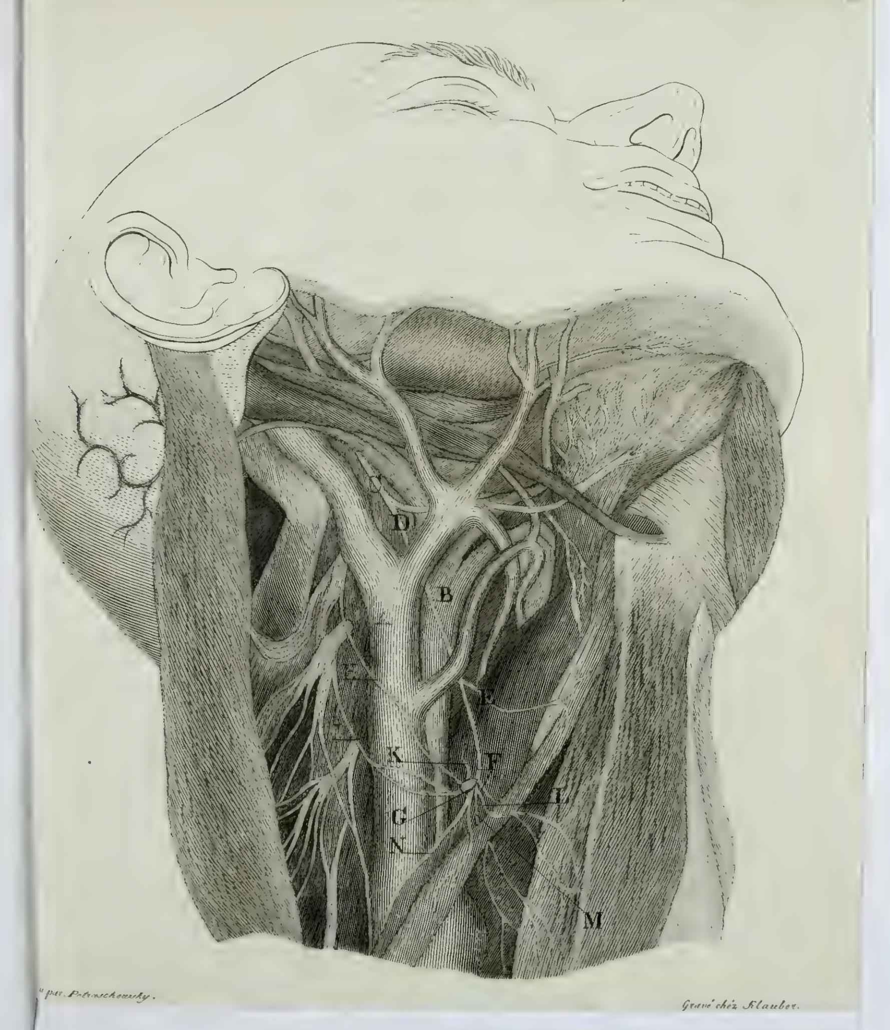


Fig I

Fig II.


C
D
B
E
K
F
G
N



per. Petraschewsky.

Gravé chez Klauber.

Fig. I.

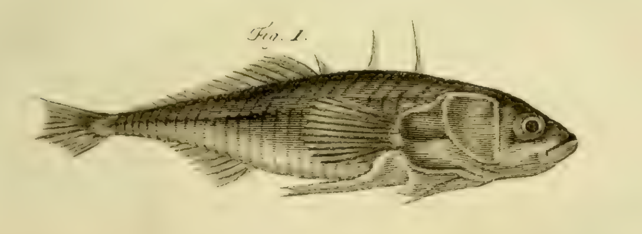


Fig. II.





Fig. II.

Fig. I.

Dess. par Tilésius.

Gravé chez Klauber



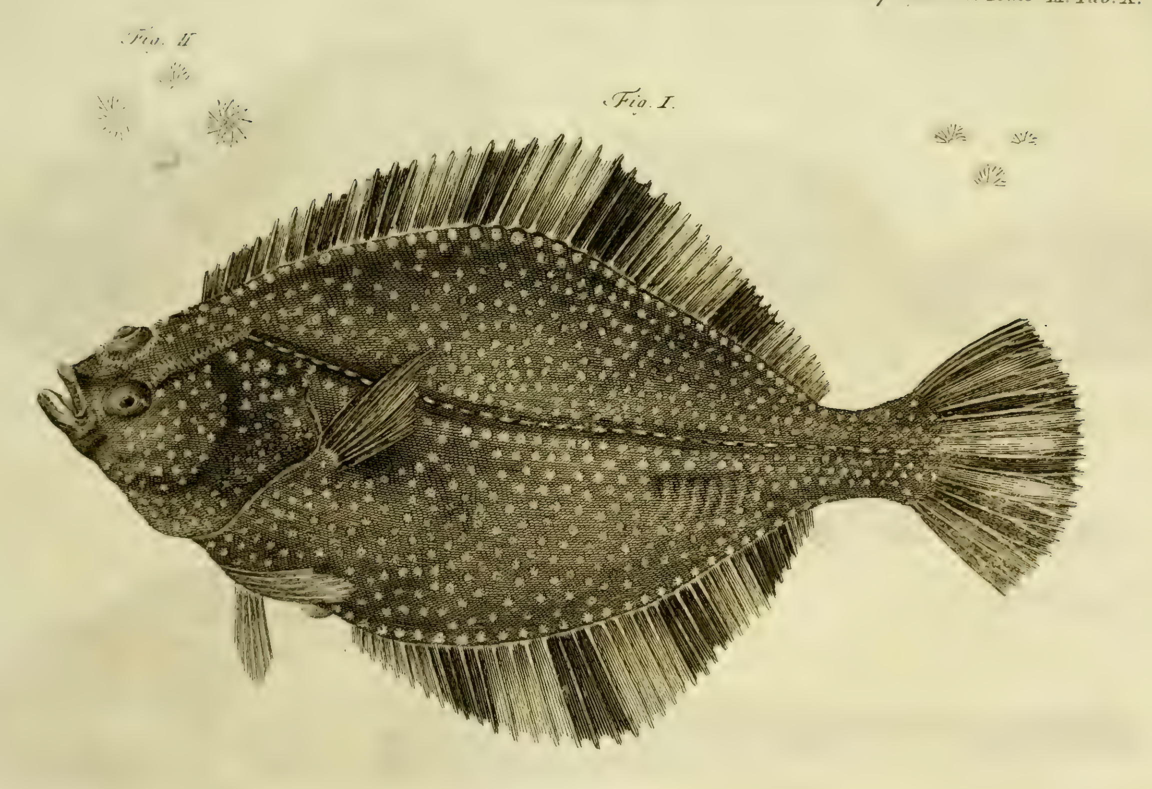
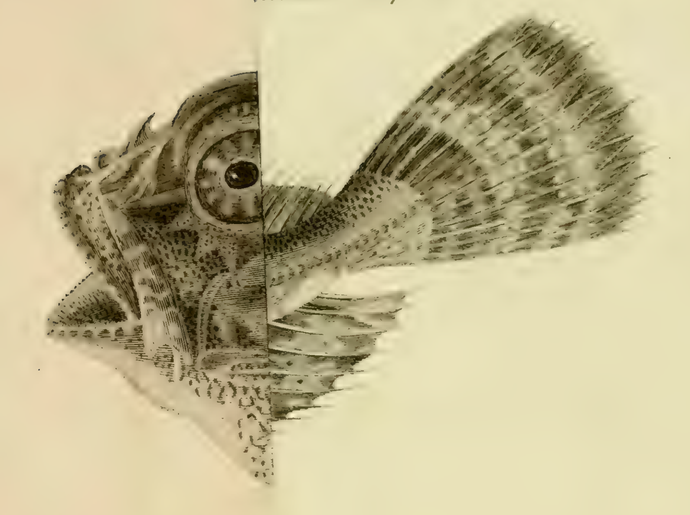

Fig. I.
Fig. II



Fig. I.

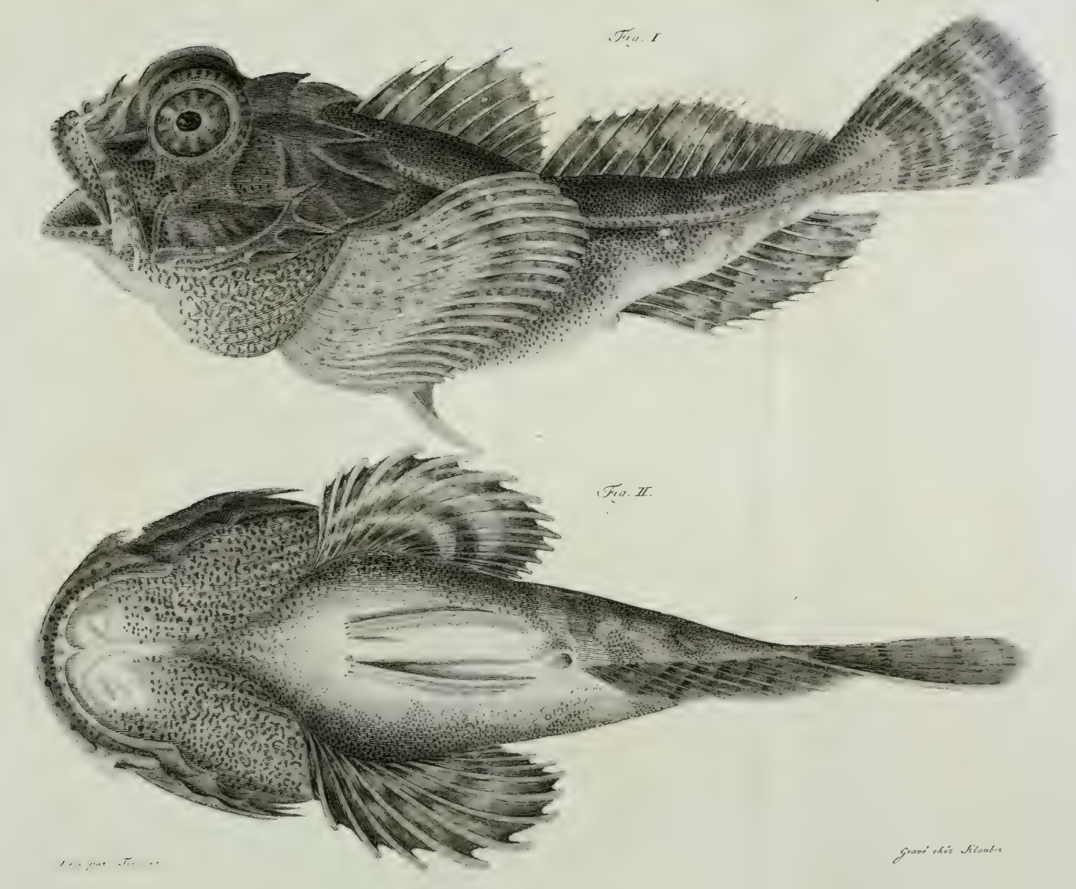
Fig. II.

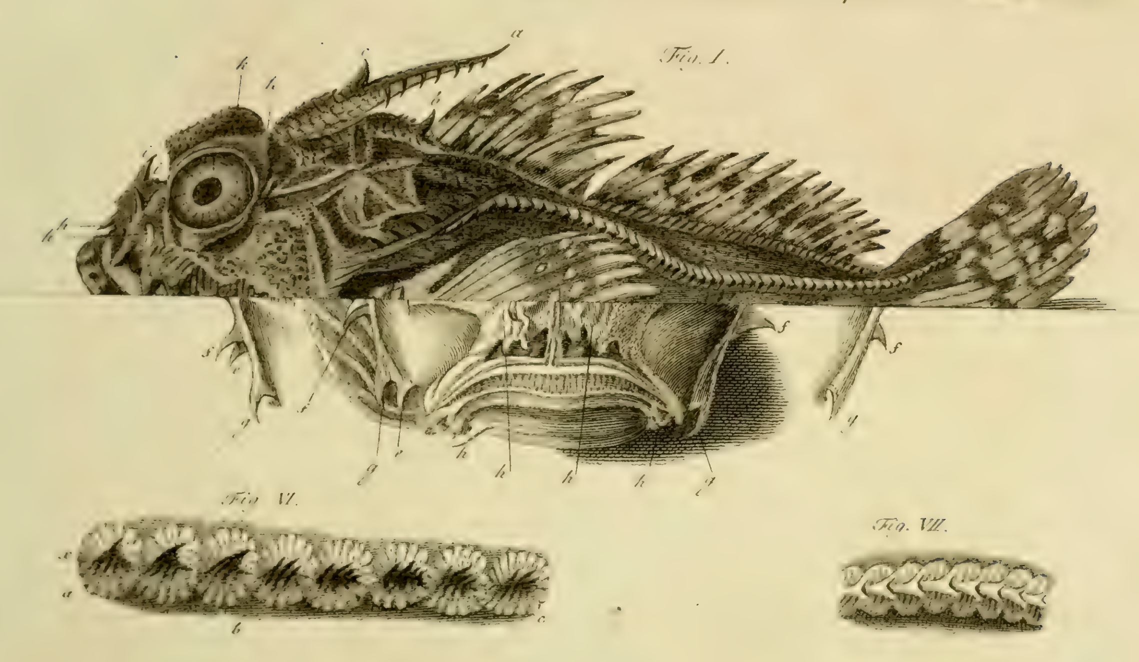
Fig. III.

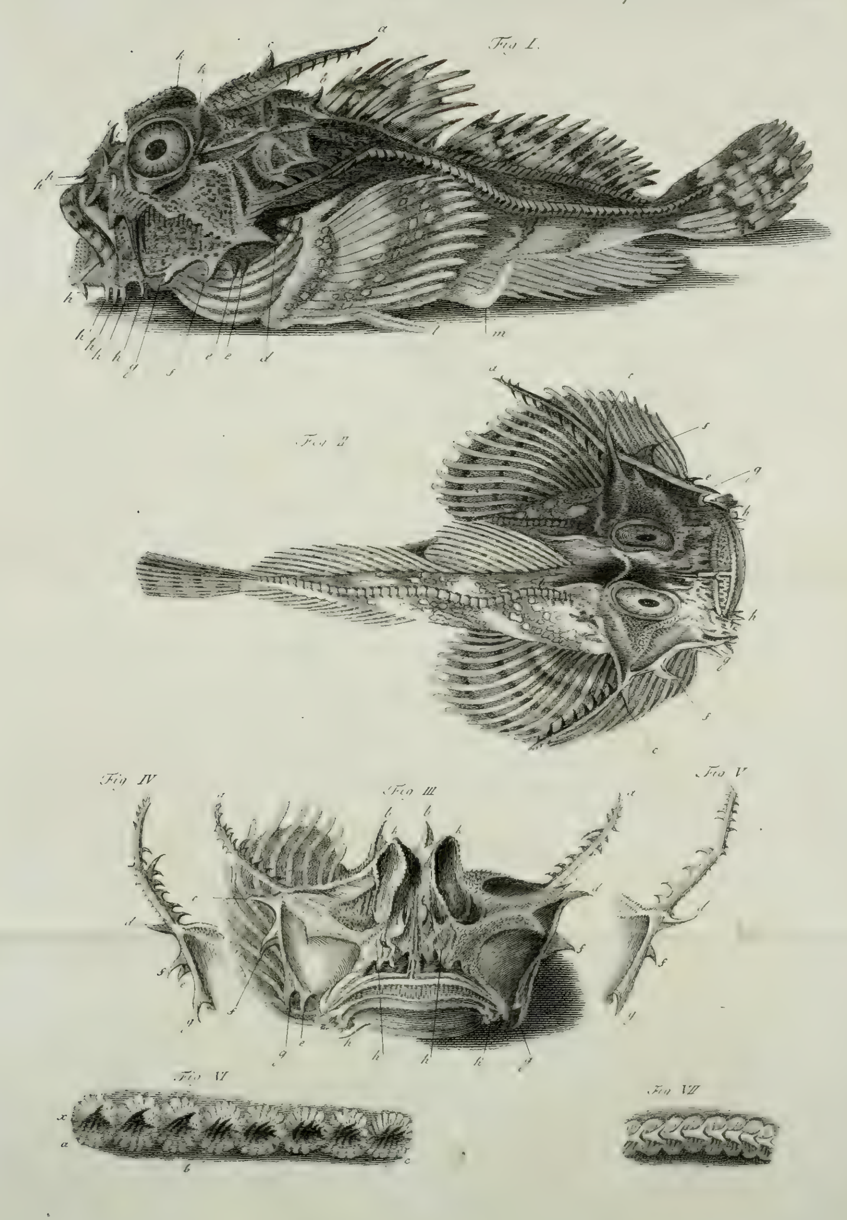




Gravé chèz Silautre


Fig. I
Fig. II.
Gravé chéz Klauber


Fig. I.
a
b
c
k
h
f
g
e
h
i
Fig. VI.
x
a
b
c
Fig. VII.



Dess. par Tilésius

Gravé chez Klauber



Erodi

Alyssum rostratum

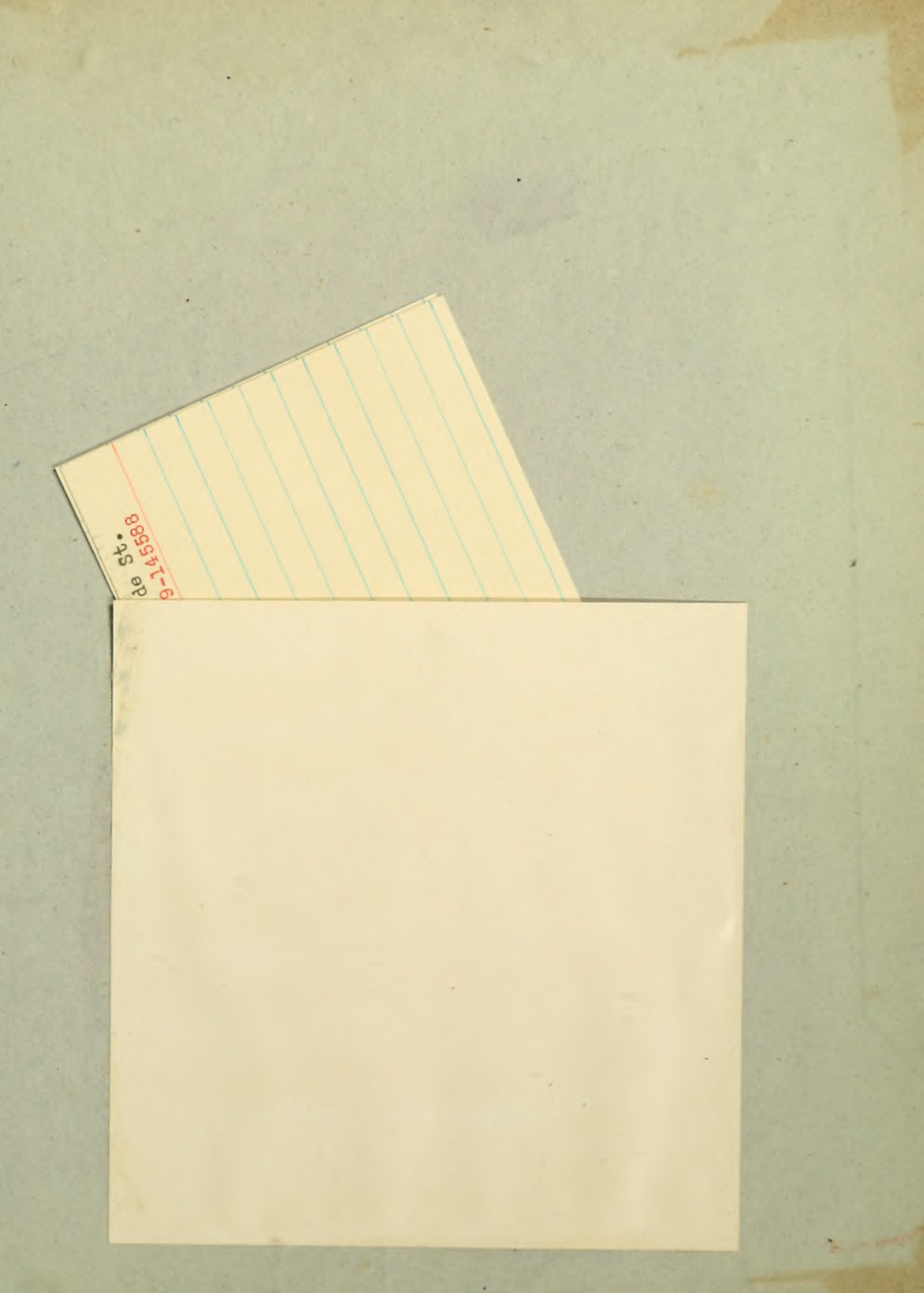
Fig II

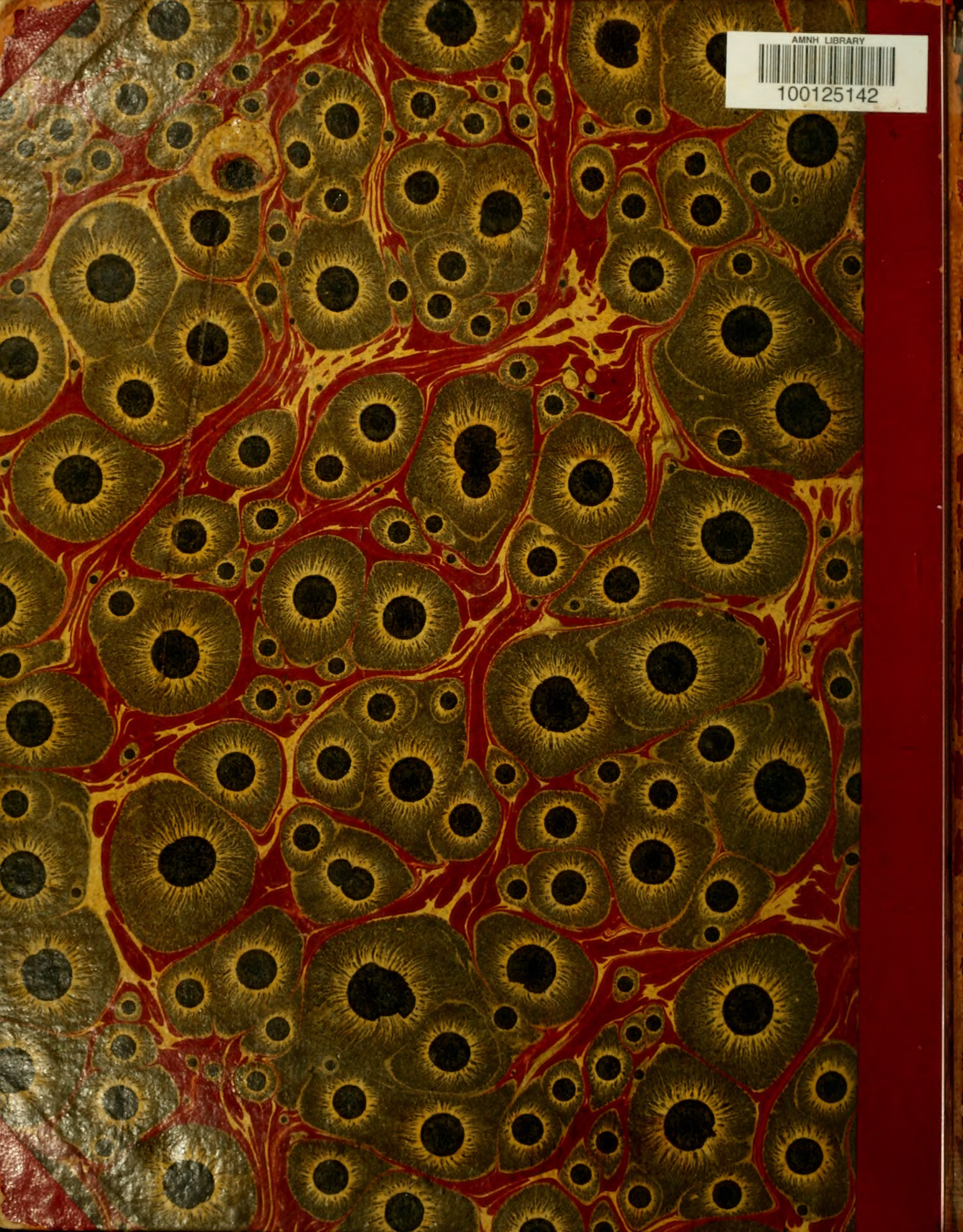
Fig I

e d c b a f g

Erodium serotinum

Alyssum rostratum


de St.
9-145588


AMNH LIBRARY
100125142